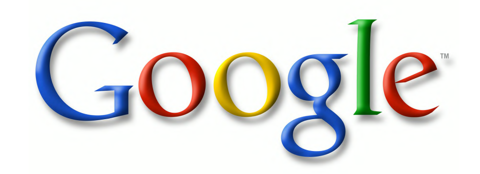


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

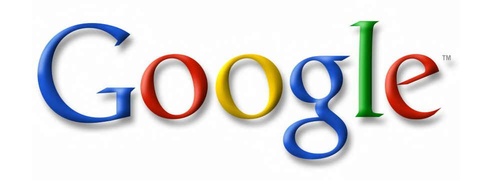
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, ииринадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.
- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице `http://books.google.com/`



Gift of

Joseph J. Smortchevsky



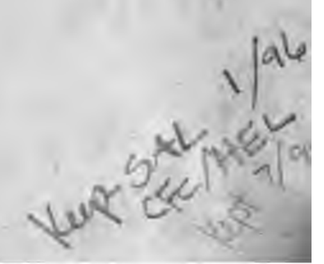
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

D.Bobylev

ANALYTIC MECHANICS
Vol. I

1885

Russian



51684

Отдѣлъ I.

Брокгаузъ и Эфронъ т. XXIII полутомъ стр. 704-705

A a	O o	Α α	alpha	a	Ξ ξ	sameth (xi)	x
B b	P p	Β β	beta	b	Ο ο	omikron	o
C c	Q q	Γ γ	gamma	g	Π π	pi	p
D d	R r	Δ δ	delta	d	? M	zade	–
E e	S s	Ε ε	Ε epsilon	e	Ϙ ϙ	qoppa	q
F f	T t	Ϝ ϛ	vav (digamma)		Ρ ρ	rho	r
G g	U u	Ζ ζ	zeta	z	Σ σ	sigma	s
H h	V v	Η η	heta	h	Τ τ	tau	t
I i	W w	Θ θ	theta	–	Υ υ	ypsilon (y, v)	u
J j	X x	Ι ι	jota	i	Φ φ	phi	–
K k	Y y	Κ κ	kappa	k	Χ χ	chi	–
L l	Z z	Λ λ	lambda	l	Ψ ψ	psi	–
M m		Μ μ	my	m	Ω ω	Ω omega	–
N n		Ν ν	ny	n			

...ой азбуки

ѣ.

А Є
обр... есть
д е

І И Ї І
иже і
и і

Н О о
нъ онъ
і о

Т Ѹ Ȣ
то укъ
у

Ѿ ѡ
отъ
от

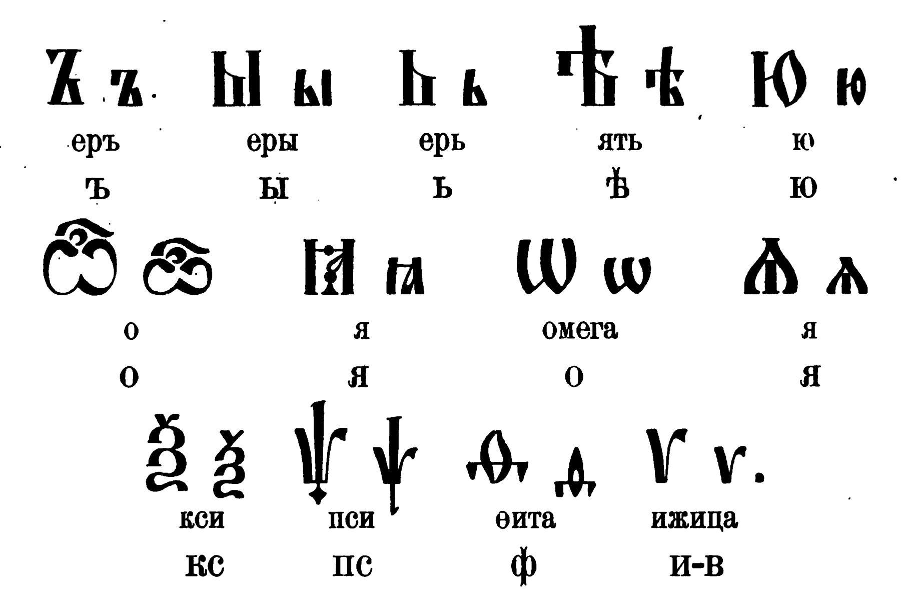
Щ щ
ща
щ

51684

Отдѣлъ I.

Всѣ буквы церковно-славянской азбуки въ алфавитномъ порядкѣ.

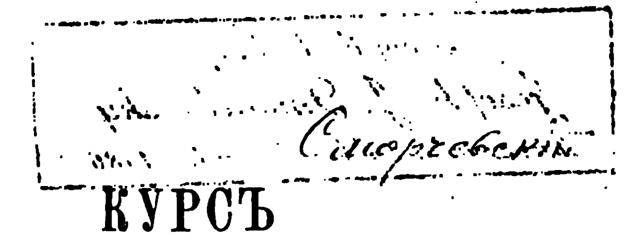
А а	Б б	В в	Г г	Д д	Є є
азъ	буки	вѣди	глаголь	добро	есть
а	б	в	г	д	е
Ж ж	Ѕ ѕ	З з	И и	І і	
живете	зѣло	земля	иже	і	
ж	з	з	и	і	
К к	Л л	М м	Н н	О о	
како	люди	мыслѣте	нашъ	онъ	
к	л	м	н	о	
П п	Р р	С с	Т т	Ꙋ ꙋ	
покой	рцы	слово	твердо	укъ	
п	р	с	т	у	
Оу оу	Ф ф	Х х	Ѿ ѿ		
оникъ	ферть	хѣръ	отъ		
у	ф	х	от		
Ц ц	Ч ч	Ш ш	Щ щ		
цы	червь	ша	ща		
ц	ч	ш	щ		



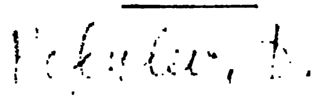
Въ церковно-славянскомъ языкѣ 42 буквы.

Первое и главное правило, при чтеніи церковно-славянскихъ книгъ: **нужно произносить слова такъ, какъ они написаны, а не такъ, какъ они произносятся въ обыкновенномъ разговорѣ.**

Напр. **Пе́тръ** (Петръ, а не Пётръ), **ме́дъ** (медъ, а не мётъ), **твоѐ** (твое, а не твоё), **спасе́тъ** (спасетъ, а не спасётъ), **царе́мъ** (царемъ, а не царёмъ), **вода̀** (вода, а не вада), **а҆́зъ** (азъ, а не асъ), **кора́бль** (корабль, а не карабль), **пло́дъ** (плодъ, а не плотъ), **е҆гѡ̀** (его, а не ево).



КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.



СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ

Профессоръ С.-Петербургскаго Университета.

I

ЧАСТЬ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ.

(СЪ ЧЕТЫРЬМЯ ЛИСТАМИ ЧЕРТЕЖЕЙ.)

2-Е ИЗДАНІЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 2 лин., 7.

1885.

From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

ACP 3583 v.1



1076

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Книга эта заключаетъ въ себѣ кинематическую часть курса аналитической механики, который я читаю лицамъ, знакомымъ съ основаніями дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

Принятое въ настоящее время раздѣленіе аналитической механики на двѣ части: Кинематическую и Кинетическую, установилось по мѣрѣ развитія науки и необходимость его указана уже давно авторитетами, которымъ аналитическая механика обязана своимъ настоящимъ состояніемъ.

Аналитическая механика имѣетъ тѣсную связь, съ одной стороны съ геометріей, съ другой—съ натуральной философіей; первая связь проявляется въ кинематикѣ, вторая—въ кинетикѣ.

Натуральною философіею называютъ, со временъ Ньютона, всю систему наукъ, занимающихся изслѣдованіемъ законовъ матерьяльнаго міра и предсказаніемъ, на основаніи этихъ законовъ, новыхъ явленій, еще не наблюденныхъ.

По опредѣленію, данному Ньютономъ въ предисловіи къ первому изданію его книги: Philosophiae naturalis principia mathematica, аналитическая, или, какъ онъ называетъ, Раціональная Механика есть точная наука, трактующая о движеніяхъ, производимыхъ данными силами, и о силахъ, потребныхъ для произведенія данныхъ движеній.

Это опредѣленіе по видимому не полно; въ немъ, напримѣръ, умалчивается о тѣхъ случаяхъ, когда матерьяльныя тѣла, подверженныя дѣйствію силъ, находятся въ покоѣ. Однако, вопросы

этого рода могутъ подразумѣваться, какъ частные случаи вопросовъ динамическихъ, такъ какъ покой можно разсматривать, какъ частный случай движенія.

Съ другой стороны нельзя и требовать, чтобы опредѣленіе всего объема науки могло быть высказано въ двухъ, трехъ фразахъ: назначеніе опредѣленія состоитъ въ указаніи цѣли науки и мѣста ея по отношенію къ наукамъ съ нею сроднымъ.

Сопоставляя вышеприведенныя опредѣленія Натуральной Философіи и Механики, мы видимъ, что послѣдняя должна служить основаніемъ первой; на этомъ мѣстѣ мы, дѣйствительно, находимъ механику, какъ у Ньютона, такъ и у новѣйшихъ авторовъ (напр. у Томсона и Тета).

Связь механики съ геометріей обусловливается тѣмъ, что прежде разсмотрѣнія зависимости между движеніемъ матерьяльныхъ тѣлъ и причинами движенія, мы должны изучить, — какъ замѣтилъ д'Аламберъ,— теорію движенія геометрическихъ и матерьяльныхъ объектовъ независимо отъ причинъ, производящихъ движеніе; эта теорія движенія, по почину Ампера, называется Кинематикою.

Хотя кинематика болѣе принадлежитъ къ геометріи, чѣмъ къ механикѣ, такъ какъ она основывается только на аксіомахъ чистой математики и, кромѣ того, многіе вопросы кинематики имѣютъ скорѣе геометрическій, чѣмъ механическій интересъ, но, однако, приходится ее разсматривать даже въ настоящее время какъ часть механики, потому что многія, разсматриваемыя въ ней, качества движенія (скорость, ускореніе, угловая скорость и проч.) имѣютъ весьма важное значеніе въ Механикѣ и почти не разсматриваются въ геометріи.

По сказаннымъ причинамъ, мы раздѣляемъ механику на:

кинематическую часть, въ которой разсматривается движеніе независимо отъ причинъ его, и на

кинетическую часть, въ которой разсматривается зависимость между движеніемъ матеріи и причинами, его производящими.

Система изложенія кинематической части, принятая мною, не заимствована ни у котораго изъ извѣстныхъ мнѣ авторовъ механики; но я не могу утверждать, чтобы она принадлежала мнѣ

всецѣло, во первыхъ потому, что во многихъ мѣстахъ я слѣдовалъ примѣру Дюгамеля, Бура, Сомова и другихъ, во-вторыхъ потому, что порядокъ изложенія, которому я слѣдую, является необходимымъ по требованію настоящаго времени; я полагаю, что въ такомъ порядкѣ излагаютъ теперь механику почти вездѣ, и надѣюсь, что одновременно съ моимъ курсомъ появятся гдѣ либо курсы другихъ авторовъ, изложенные подобнымъ-же образомъ.

Не входя здѣсь въ подробное перечисленіе порядка изложенія, съ которымъ можно ознакомиться по прилагаемому оглавленію, я укажу на введенную мною статью объ относительномъ движеніи точки по отношенію къ движущейся измѣняемой средѣ (Глава V) и на относящіеся къ этой статьѣ примѣры 40 и 41 (въ Главѣ VII); введеніе ихъ я счелъ полезнымъ въ видахъ обобщенія теоремы о геометрическомъ сложеніи скоростей.

Въ виду назначенія этого курса я не включилъ въ него теоріи криволинейныхъ координатъ, статьи о мгновенномъ центрѣ ускореній точекъ твердаго тѣла, статьи объ относительныхъ ускореніяхъ точекъ твердаго тѣла, имѣющаго относительное движеніе по отношенію къ нѣкоторой неизмѣняемой системѣ, и нѣкоторыхъ другихъ статей; такъ называемая кинематика измѣняемаго тѣла будетъ помѣщена въ особой книгѣ, въ которой будетъ изложена гидродинамика и теорія упругости.

Нѣкоторыми примѣрами, помѣщенными въ книгѣ, я обязанъ знакомству съ работами нашихъ русскихъ ученыхъ: Гг. Профессоровъ Окатова, В. Цингера, Жуковскаго и другихъ. Надѣюсь впослѣдствіи присоединить къ этимъ примѣрамъ большее число задачъ для упражненія по аналитической механикѣ.

Д. Бобылевъ.

С.-Петербургъ.
21-го Сентября 1880 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Кинематической части.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Аналитическая или Раціональная Механика учитъ:

Опредѣлять зависимость между *движеніемъ матерьяльныхъ тѣлъ* и *причинами*, производящими или измѣняющими движеніе,

и опредѣлять условія, при которыхъ матерьяльныя тѣла, подверженныя дѣйствію такихъ причинъ, могутъ оставаться въ покоѣ или двигаться извѣстнымъ образомъ.

2. Всякое движеніе совершается въ пространствѣ и во времени; послѣднія суть понятія первоначальныя и простѣйшія и поэтому не нуждающіяся въ опредѣленіяхъ.

Движеніе матерьяльнаго тѣла есть совокупность движеній всѣхъ его точекъ.

Движеніе точки есть послѣдовательный и непрерывный переходъ ея черезъ точки пространства, совершающійся съ теченіемъ времени.

3. Всякое матерьяльное тѣло имѣетъ нѣкоторое строеніе и обладаетъ нѣкоторыми физическими свойствами.

Подъ строеніемъ тѣла понимается: форма или видъ ограни-

чивающей его поверхности, видъ поверхностей ограничивающихъ его части и вообще взаимное расположеніе всѣхъ частей его, какъ крупныхъ, такъ и самыхъ мельчайшихъ.

Измѣненія въ строеніи тѣла называются деформаціями.

Такія тѣла, которыя ни отъ какихъ причинъ не претерпѣваютъ никакихъ деформацій, называются вполнѣ твердыми или неизмѣняемыми тѣлами; можно сказать, что: *твердое или неизмѣняемое тѣло есть такое, въ которомъ разстоянія между каждыми двумя точками, принадлежащими ему, остаются неизмѣнными, какъ бы тѣло ни двигалось и какимъ бы причинамъ движенія или условіямъ оно ни было подвержено.*

Такія тѣла называются также идеально-твердыми, такъ какъ въ дѣйствительности ни одно вещество не удовлетворяетъ условію полной неизмѣняемости въ строгомъ смыслѣ этого слова; твердыя, въ физическомъ смыслѣ, тѣла приближаются къ этому идеалу болѣе или менѣе, смотря по свойствамъ вещества, виду тѣла, величинамъ и направленіямъ приложенныхъ силъ.

Одно изъ физическихъ свойствъ, присущихъ всякому дѣйствительному матерьяльному тѣлу, есть инерція.

Одно изъ проявленій свойства инерціи заключается въ томъ, что тѣло, находящееся въ покоѣ, не можетъ безъ причины прійдти въ движеніе.

4. Причины, приводящія покоющееся тѣло въ движеніе, называются силами.

Другое проявленіе свойства инерціи заключается въ томъ, что по прекращеніи дѣйствія силъ на движущееся тѣло, движеніе его не прекращается, но сохраняетъ нѣкоторую опредѣленную форму, опредѣленіе которой мы сдѣлаемъ послѣ; но теперь условимся называть это движеніе, сохраняющееся въ тѣлѣ послѣ прекращенія дѣйствія силъ на него, движеніемъ по инерціи.

Движеніе по инерціи не можетъ, ни уничтожиться, ни измѣнить свою форму безъ новаго дѣйствія силъ.

Такимъ образомъ можно сказать, что причины движенія суть двоякаго рода:

а) дѣйствіе силъ,

б) свойство инерціи.

5. Прежде чѣмъ приступить къ предмету собственно Аналитической Механики, придется условиться относительно опредѣленія нѣкоторыхъ понятій присущихъ движенію и существенно необходимыхъ въ Аналитической Механикѣ; эти понятія суть: скорость, ускореніе, угловая скорость и ускореніе и проч.

При этомъ мы будемъ разсматривать движеніе независимо отъ производящихъ его причинъ.

Ученіе о движеніи, разсматриваемомъ независимо отъ причинъ его производящихъ, называется Кинематикою; сравнивъ это опредѣленіе съ вышеприведеннымъ опредѣленіемъ Аналитической Механики, мы должны будемъ заключить, что Кинематика не составляетъ, въ строгомъ смыслѣ слова, части Аналитической Механики; это есть скорѣе часть Геометріи, именно Геометрія движенія; несмотря на это, при настоящемъ состояніи Математическимъ наукъ, приходится, въ силу необходимости, причислять Кинематику къ Аналитической Механикѣ, разсматривая ее какъ Геометрическое введеніе въ послѣднюю.

Послѣ Кинематической части мы изложимъ тѣ положенія и гипотезы, на которыхъ основывается Аналитическая Механика.

Послѣдняя раздѣляется, какъ извѣстно, на Статику и Динамику; въ первой разсматриваются вопросы о равновѣсіи тѣлъ (если выражаться точно, то слѣдуетъ сказать: вопросы о равновѣсіи силъ приложенныхъ къ покоющимся тѣламъ), во второй— вопросы о движеніи тѣлъ.

Статика и Динамика капельно-жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ, теоріи: упругости и равновѣсія сыпучихъ тѣлъ и проч., суть спеціальные отдѣлы Аналитической Механики.

Кромѣ того, въ курсахъ Аналитической Механики посвящается особая глава теоріи силъ, дѣйствующихъ на разстояніяхъ и имѣющихъ такъ называемый потенціалъ.

---

x) Всѣ системы координатъ распадаются на двѣ группы a и b, которыя можно хорошо различать слѣдующимъ образомъ: [illegible] что [illegible] палецъ, вытянутый въ сторону, представляетъ [illegible] направленіе X, вытянутый указательный палецъ — [illegible], средній палецъ перпендикулярно къ [illegible] — [illegible] Z, то правая рука представитъ систему группы a, [illegible] рука — систему группы b. (М. Планкъ).

Знач[illegible] [illegible]

I-1

Часть Кинематическая.

ГЛАВА I.

Абсолютное движенiе и скорость точки.

§ 1. Абсолютное движенiе точки есть переходъ ея черезъ точки пространства, совершающiйся съ теченiемъ времени послѣдовательно и непрерывно.

Пространство и всѣ точки его мы понимаемъ неподвижными, поэтому неподвижна и всякая линiя и всякая поверхность проведенная черезъ точки пространства; мы проводимъ въ пространствѣ три взаимно перпендикулярныя плоскоски и принимаемъ ихъ за плоскости YOZ, ZOX, XOY прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ, помощiю которыхъ выражаемъ положенiе точекъ въ пространствѣ. Пересѣченiя этихъ плоскостей, такъ называемыя оси координатъ, мы обозначаемъ чрезъ OX, OY, OZ (черт. 1); каждая ось имѣетъ положительную и отрицательную сторону; положительныя стороны осей расположены такъ, что наблюдатель, стоящiй ногами въ O — началѣ координатъ, прислонившiйся къ положительной оси Z-овъ и смотрящiй вдоль по положительной оси X-овъ, будетъ имѣть положительную ось Y-овъ вправо (черт. 2 и 3). Если намъ случится разсматривать какой либо вопросъ, въ которомъ положенiе точки опредѣляется координатами на плоскости XOY, то мы всегда будемъ предполагать такое именно относительное расположенiе осей OX и OY.

F-1.2.

Время считается отъ какой либо эпохи или начальнаго момента и измѣряется числомъ единицъ времени протекшихъ отъ начальной эпохи до разсматриваемаго момента; время прошедшее отъ эпохи до момента бывшаго ранѣе эпохи есть величина отрицательная.

За единицу времени мы будемъ принимать секунду средняго времени; въ звѣздныхъ суткахъ заключается 86164,09 такихъ секундъ. Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ принята другая единица времени, будетъ сдѣлано надлежащее указаніе.

Подвижная точка не можетъ находиться одновременно въ нѣсколькихъ точкахъ пространства, но можетъ побывать въ нихъ *послѣдовательно* въ разные моменты времени; переходъ ея изъ одной точки пространства въ другую, находящуюся въ конечномъ разстояніи отъ первой, совершается черезъ промежуточные точки непрерывно, такъ что движущаяся точка чертитъ въ пространствѣ *непрерывную* линію, называемую *траекторіею абсолютнаго движенія точки.*

Выраженіе движенія точки въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ. Составленіе уравненій траекторіи. Примѣры 1, 2, 3.

§ 2. Абсолютныя координаты движущейся точки суть величины перемѣнныя (x, y, z), непрерывно измѣняющіяся съ теченіемъ времени t, они суть нѣкоторыя функціи времени:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t) \ \ldots\ldots\ (1)$$

Чтобы вполнѣ знать абсолютное движеніе точки, надо чтобы были даны эти функціи $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ или чтобы имѣлись средства и данныя для ихъ опредѣленія.

Если $f_1 f_2 f_3$ извѣстны, то, по исключеніи изъ равенствъ (1) времени t, мы получимъ *два* уравненія кривой линіи, соединяющей всѣ тѣ точки пространства, черезъ которыя движущаяся точка проходитъ при данномъ движеніи, т. е. мы получимъ уравненія траекторіи этого движенія.

Примѣры:

Примѣръ 1-й

$$x=a+\alpha t,\ y=b+\beta t,\ z=c+\gamma t;$$

уравненія траекторіи:

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma};$$

I-2.3

это есть прямая линія, проходящая черезъ ту точку пространства, координаты которой суть: a, b, c; направленіе этой линіи составляетъ съ осями координатъ такіе углы λ, μ, ν, косинусы которыхъ пропорціональны величинамъ α, β, γ:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \alpha : \beta : \gamma.$$

Примѣръ 2-й.

Движеніе точки происходитъ въ плоскоски XY.

$$x = \alpha t,\ y = \frac{gt^2}{2};\ z = o;$$

уравненіе траэкторіи:

$$x^2 = \frac{2\alpha^2}{g}y;\ z = o$$

показываетъ, что это есть парабола, имѣющая вершину въ O и главную ось по оси Y черт. 4.

Примѣръ 3-й

$$x = \alpha t;\ y = \frac{gt^2}{2} - \beta t;\ z = o;$$

уравненіе траэкторіи:

$$y = \frac{gx^2}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}x;\ z = o;$$

это — тоже парабола, вершина которой не находится въ началѣ координатъ черт. 4 bis.

§ 3. Во многихъ случаяхъ, для удобства анализа, выражаютъ положеніе движущейся точки помощію координатъ другой системы, напр. косоугольной, полярной, сферической и др. смотря по характеру движенія. Мы здѣсь дадимъ необходимыя указанія относительно полярныхъ координатъ на плоскости, полуполярныхъ и сферическихъ координатъ въ трехъ измѣреніяхъ, которыми намъ нерѣдко придется пользоваться. Сферическія координаты

Сферическія координаты какой либо точки M суть:

$r = OM$ — длина радіуса вектора ея, т. е. разстояніе точки M отъ основной точки O — полюса системы, черт. 5.

1-3

$\varphi = MOP$ — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ основною линіею OP — полярною осью системы, $\psi = XOQ$ — двугранный уголъ, составляемый плоскостью MOP съ основною плоскостью POX, которую можно назвать плоскостью перваго меридіана.

Всѣ точки, которыя имѣютъ одну и туже координату $r = R$, лежатъ на поверхности сферы имѣющей центръ въ O и радіусъ равный R.

Всѣ точки, которыя имѣютъ одну и туже координату $\varphi = \Phi$, лежатъ на конической поверхности, имѣющей вершину въ O, и производящія которой составляютъ съ полярною осью уголъ равный Φ.

Всѣ точки, которыя имѣютъ одну и ту же координату $\psi = \Psi$, лежатъ въ одной и той же плоскости меридіональной, т. е. проходящей черезъ полярную ось; уголъ Ψ опредѣляетъ эту плоскость.

Эти поверхности называются *координатными поверхностями*

Все пространство занято тремя системами координатныхъ поверхностей:

1) Сферами, имѣющими центръ въ полюсѣ O; радіусы сферъ имѣютъ всевозможныя величины отъ нуля до безконечности; уравненіе такой сферы, имѣющей радіусъ R, въ сферическихъ координатахъ есть:

$$r = R.$$

2) Коническими поверхностями вращенія около оси OP; углы φ поверхностей имѣютъ всевозможныя величины отъ нуля до π; уравненіе такой поверхности, имѣющей уголъ Φ, въ сферическихъ координатахъ есть:

$$\varphi = \Phi.$$

3) Меридіональными плоскостями наклоненными къ плоскости перваго меридіана подъ всевозможными углами отъ $\psi = 0$ до $\psi = 2\pi$; уравненіе меридіональной плоскости, составляющей съ первымъ меридіаномъ уголъ Ψ, въ сферическихъ координатахъ есть:

$$\psi = \Psi.$$

Положеніе точки опредѣляется какъ мѣсто пересѣченія трехъ координатныхъ поверхностей:

$$r = R,\ \varphi = \Phi,\ \psi = \Psi$$

на которыхъ она находится совмѣстно.

Совокупность уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \Phi\\ \psi &= \Psi\end{aligned}\right\}$$

представляетъ линію пересѣченія меридіональной плоскости и конической поверхности, на которыхъ находится точка.

Совокупность уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \Psi\\ r &= R\end{aligned}\right\}$$

представляетъ линію пересѣченія меридіональной плоскости и сферы, на которыхъ находится точка.

Совокупность уравненій:

$$\left.\begin{aligned}r &= R\\ \varphi &= \Phi\end{aligned}\right\}$$

представляетъ линію пересѣченія сферы и конической поверхности, на которыхъ находится точка.

Эти линіи называются *координатными линіями;* касательныя же въ точкѣ M, проведенныя къ координатнымъ линіямъ, называются *координатными осями.*

Положительная сторона каждой координатной оси направляется въ ту сторону, куда увеличивается третья координата, а именно:

положительная сторона оси α, совпадающей съ прямою линіею ($\varphi = \Phi$, $\psi = \Psi$), направлена въ ту сторону, куда увеличивается r, т. е. отъ полюса O,

положительная сторона оси β, касательной къ меридіану $\psi = \Psi$ на сферѣ $r = R$, направлена въ ту сторону, куда увеличивается координата φ,

положительная сторона оси γ, касательной къ паралельному (малому) кругу $\varphi = \Phi$ на сферѣ $r = R$, направлена въ ту сторону, куда увеличивается ψ;

I-3.4.5.

(уголъ ψ увеличивается по направленію движенія стрѣлокъ часовъ для наблюдателя расположеннаго по OP).

Эти координатныя оси α, β, γ измѣняютъ свои направленія при движеніи точки; они ортогональны, т. е. составляютъ одна съ другою прямые углы.

Координаты движущейся точки суть функціи времени:

$$r = f_1(t);\ \varphi = f_2(t);\ \psi = f_3(t);\ \ldots\ldots \quad (2)$$

если эти функціи извѣстны, то извѣстно движеніе точки; исключивъ изъ равенствъ время t, получимъ два уравненія между r, φ, ψ, представляющія траэкторію точки въ сферическихъ координатахъ.

Полярные координаты.

§ 4. При употребленіи *полярныхъ координатъ* на плоскости, координаты суть: радіусъ векторъ $\rho = OM$ и уголъ $\theta = POM$; координатныя линіи суть: $\theta = \text{const}$—линія $OM\alpha$ и кругъ $\rho = \text{const}$; координатныя оси α и β ортогональны; θ измѣняется отъ нуля до 2π, и далѣе, въ положительную и отъ нуля до -2π, и далѣе въ отрицательную сторону; собственно говоря θ можетъ принимать всевозможныя положительныя и отрицательныя величины; но $(\theta + 2n\pi)$ имѣетъ при цѣломъ n тоже геометрическое значеніе, что и θ (черт. 6).

Кругово-цилиндрическія координаты.

§ 5. Полуполярныя или круговоцилиндрическія координаты суть:

1) $z = NM$, разстояніе точки M отъ основной плоскости XOY; координатныя поверхности, выражаемыя уравненіями вида: $z = \text{const.}$, суть плоскости, параллельныя плоскости XOY; z можетъ измѣняться между $-\infty$ и $+\infty$;

2) $\theta = NOX$ есть уголъ между плоскостью MO_1ON и основною плоскостью ZOX; координатныя поверхности, выражаемыя уравненіями вида: $\theta = \text{const.}$, суть плоскости, проходящія черезъ ось OZ; θ можетъ измѣняться отъ нуля до 2π въ положительную и до (-2π) въ отрицательную сторону; (черт. 7)

3) $\rho = O_1M = ON$ есть разстояніе точки M отъ основной оси OZ; координатныя поверхности, выражаемыя уравненіями вида: $\rho = \text{const.}$, суть цилиндрическія поверхности съ круговымъ сѣченіемъ, производящія которыхъ параллельны оси OZ; ρ можетъ измѣняться отъ нуля до $+\infty$.

I-5.6.

Координатныя линіи и оси суть:

координатная линія:

$$\theta = \text{постоянному}$$
$$z = \text{постоян.}$$

есть прямая линія $O_1 M\alpha$; ось α направлена въ сторону увеличенія ρ;

координатная линія:

$$z = \text{пост.}$$
$$\rho = \text{пост.}$$

есть кругъ радіуса ρ въ плоскости $z = \text{пост.}$, имѣющій центръ на оси OZ; ось β направлена по касательной къ этой линіи въ сторону увеличенія θ;

координатная линія:

$$\rho = \text{пост.}$$
$$\theta = \text{пост.}$$

есть производящая цилиндра $\rho = \text{пост.}$, проходящая черезъ точку M; ось γ направлена въ сторону увеличенія z.

§ 6. Примѣры движеній выраженныхъ въ этихъ координатахъ: Въ полярныхъ координатахъ на плоскости: Примѣры 4, 5, 6, 7.

Примѣръ 4-й

$$\rho = at; \quad \theta = \frac{2\pi}{T} t,$$

a и T — постоянныя величины; уравненіе траэкторіи:

$$\rho = \frac{aT}{2\pi} \theta$$

представляетъ Архимедову спираль.

Примѣръ 5-й

$$\rho = Ae^{nt}; \quad \theta = \frac{2\pi}{T} t;$$

уравненіе траэкторіи

$$\rho = Ae^{\frac{nT}{2\pi}\theta}$$

представляетъ логариѳмическую спираль.

Въ сфефическихъ координатахъ:

Примѣръ 6-й.

$$r = R$$

$$\varphi = \varphi_0 + at$$

$$\psi = (tg\alpha) log \left[\frac{tg\frac{(\varphi_0 + at)}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}} \right].$$

Траэкторія, находящаяся на поверхности сферы радіуса R, выражается уравненіями:

$$r = R$$

$$tg\frac{\varphi}{2} = tg\frac{\varphi_0}{2} e^{\left(\frac{\psi}{tg\alpha}\right)}.$$

Въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ будетъ показано, что касательная въ каждой точкѣ этой кривой составляетъ съ меридіаномъ этой точки постоянный уголъ α; такая кривая называется локсодроміею.

Въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

Примѣръ 7-й

$$\rho = R$$

$$\theta = \frac{2\pi}{T} t$$

$$z = h\frac{t}{T};$$

уравненіе траэкторіи, находящейся на цилиндрической поверхности $\rho = R$:

$$z = h\frac{\theta}{2\pi};$$

это есть винтовая линія; шагъ винта $= h$ а направленіе винтовой линіи противоположно тому, по которому дѣлается нарѣзка во всѣхъ обыкновенныхъ винтахъ.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ полезно бываетъ ввести прямолиней-

I-6.

ныя косоугольныя координаты; при употребленіи ихъ надо, конечно, знать углы между осями координатъ.

угол. коор-аты. Укажемъ на примѣненіе косоугольныхъ координатъ къ примѣру 3. Возьмемъ новую ось OX_1 (черт. 8), составляющую съ осью Y уголъ $\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)$, а съ осью X уголъ ω, тангенсъ котораго равенъ: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$; новыя косоугольныя координаты $x_1 = op$, $y_1 = pm$ всякой точки выражаются въ прежнихъ прямоугольныхъ координатахъ ($x = on$, $y = nm$) слѣдующимъ образомъ:

$$x_1 = \frac{x}{\cos\omega};\ y_1 = y + x tg\omega,$$

или, такъ какъ $tg\omega = \frac{\beta}{\alpha}$, а слѣдовательно $\cos\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, то:

$$x_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}x;\ y_1 = y + \frac{x\beta}{\alpha}.$$

Подставивъ сюда выраженія x и y въ функціи времени, данныя въ примѣрѣ 3-мъ, мы получимъ слѣдующія выраженія движенія въ косоугольныхъ координатахъ:

$$x_1 = t\sqrt{\alpha^2+\beta^2};\ y_1 = \frac{gt^2}{2}.$$

Эти выраженія имѣютъ то преимущество передъ выраженіями того же движенія въ прямоугольныхъ координатахъ, что y_1 выражается однимъ только членомъ, какъ въ примѣрѣ 2-мъ.

По исключеніи времени t, мы получимъ уравненіе траэкторіи въ такомъ видѣ:

$$x_1^2 = \frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{g}y_1.$$

Извѣстно изъ аналитической геометріи, что въ такомъ видѣ представляется уравненіе параболы, если за оси косоугольныхъ координатъ взять: побочную ось параболы, проходящую чрезъ какую либо точку ея и касательную въ этой точкѣ; извѣстно, что побочная ось OY (черт. 9) параболы параллельна главной оси и что хорды m_1m, параллельныя касательной OX_1, дѣлятся осью OY пополамъ (въ точкѣ n); это и видно изъ приведеннаго уравненія; для каждаго $y_1 = on$ уравненіе даетъ двѣ равныя и противоположныя величины для x, а именно: $(+x) = nm$ и $(-x) = nm_1$.

§ 7. **Движеніе точки въ пространствѣ можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ: если будетъ дана траэкторія, какъ по виду, такъ и по положенію въ пространствѣ, и если будетъ извѣстно въ функціи времени разстояніе движущейся точки отъ нѣкоторой опредѣленной точки S_0 траэкторіи, считаемое по дугѣ этой кривой.**

Разстоянія по дугѣ траэкторіи измѣряются линейными единицами и считаются отъ какой либо точки траэкторіи положительными въ одномъ, отрицательными въ противоположномъ направленіи по кривой: величины разстояній отъ S_0 мы будемъ обозначать буквою s ($s_0 = O$); относительно положительнаго направленія по траэкторіи надо въ каждомъ случаѣ условиться.

Приведемъ два примѣра движеній, выраженныхъ такимъ образомъ.

Примѣръ 8. Траэкторія — окружность круга, выраженная въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$\rho = R;$$

положительныя разстоянія по дугѣ считаются отъ точки S_0, находящейся на полярной оси, въ сторону указанную стрѣлкою; положеніе точки на кривой выражается равенствомъ

$$s = A \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

полагая $t_0 = O$ (черт. 10).

Движущаяся точка въ этомъ движеніи колеблется по дугѣ, совершая размахи равные A въ положительную и отрицательную стороны отъ точки S_0; движеніе періодическое; продолжительность полнаго періода равна T.

Примѣръ 9. Траэкторія — циклоида, отнесенная къ прямоугольнымъ прямолинейнымъ координатамъ и выражаемая уравненіями:

$$x = R(\omega + \sin \omega)$$

$$y = R(1 + \cos \omega),$$

въ которыхъ ω есть вспомогательный уголъ, могущій имѣть положительныя и отрицательныя значенія.

I-7.8.

Точка S_0 — на оси $У$ (черт. 11); положительное направленіе по траэкторіи — въ сторону означенную стрѣлкою.

Положеніе точки на кривой выражается равенствомъ:

$$s = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0);$$

что представляетъ движеніе сходное съ движеніемъ предыдущаго примѣра по кругу.

Каждое изъ трехъ уравненій:

$$x = f_1(t); \ y = f_2(t); \ z = f_3(t),$$

выражающихъ въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ какое либо движеніе точки въ пространствѣ, представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ движеніе по одной изъ осей координатъ прямоугольной проэкціи движущейся точки на эту ось, то есть: $x = f_1(t)$ представляетъ движеніе по оси X проэкціи движущейся точки на ось X-овъ; точкою S_0 служитъ начало координатъ, разстоянія s отъ нея суть величины x; положительное направленіе совпадаетъ съ направленіемъ положительной оси X-овъ.

Подобныя значенія имѣютъ и оба другія уравненія.

§ 8. Пусть s_1 есть разстояніе по траэкторіи движущейся точки отъ точки S_0 въ моментъ t_1, и s_2 — подобная же величина опредѣляющая положеніе точки въ моментъ t_2.

Разность $(s_2 - s_1)$ представляетъ *перемѣщеніе* точки по траэкторіи изъ того положенія, которое она имѣла въ моментъ t_1, въ то положеніе, которое она имѣетъ въ моментъ t_2; перемѣщеніе можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ и можетъ быть равно нулю, хотя точка и имѣла движеніе въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$.

Такъ въ примѣрѣ 8-мъ перемѣщеніе за время отъ $t = O$ до $t = \frac{T}{2}$ равно нулю, хотя въ теченіи этого времени точка имѣла движеніе отъ $s = O$ до $s = A$ и обратно и длина всего пути, пройденнаго точкою въ теченіи этого промежутка времени, равна $2A$.

Длина пути, проходимаго точкою въ теченіи какого либо

§ 7. Движеніе точки въ пространствѣ можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ: если будетъ дана траэкторія, какъ по виду, такъ и по положенію въ пространствѣ, и если будетъ извѣстно въ функціи времени разстояніе движущейся точки отъ нѣкоторой опредѣленной точки S_0 траэкторіи, считаемое по дугѣ этой кривой.

Разстоянія по дугѣ траэкторіи измѣряются линейными единицами и считаются отъ какой либо точки траэкторіи положительными въ одномъ, отрицательными въ противоположномъ направленіи по кривой: величины разстояній отъ S_0 мы будемъ обозначать буквою s ($s_0 = O$); относительно положительнаго направленія по траэкторіи надо въ каждомъ случаѣ условиться.

Приведемъ два примѣра движеній, выраженныхъ такимъ образомъ.

Примѣръ 8. Траэкторія — окружность круга, выраженная въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$\rho = R;$$

положительныя разстоянія по дугѣ считаются отъ точки S_0, находящейся на полярной оси, въ сторону указанную стрѣлкою; положеніе точки на кривой выражается равенствомъ

$$s = A \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

полагая $t_0 = O$ (черт. 10).

Движущаяся точка въ этомъ движеніи колеблется по дугѣ, совершая размахи равные A въ положительную и отрицательную стороны отъ точки S_0; движеніе періодическое; продолжительность полнаго періода равна T.

Примѣръ 9. Траэкторія — циклоида, отнесенная къ прямоугольнымъ прямолинейнымъ координатамъ и выражаемая уравненіями:

$$x = R(\omega + \sin \omega)$$

$$y = R(1 + \cos \omega),$$

въ которыхъ ω есть вспомогательный уголъ, могущій имѣть положительныя и отрицательныя значенія.

Точка S_0 — на оси $У$ (черт. 11); положительное направленіе по траэкторіи — въ сторону означенную стрѣлкою.

Положеніе точки на кривой выражается равенствомъ:

$$s = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0);$$

что представляетъ движеніе сходное съ движеніемъ предыдущаго примѣра по кругу.

Каждое изъ трехъ уравненій:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t),$$

выражающихъ въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ какое либо движеніе точки въ пространствѣ, представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ движеніе по одной изъ осей координатъ прямоугольной проэкціи движущейся точки на эту ось, то есть: $x = f_1(t)$ представляетъ движеніе по оси X проэкціи движущейся точки на ось X-овъ; точкою S_0 служитъ начало координатъ, разстоянія s отъ нея суть величины x; положительное направленіе совпадаетъ съ направленіемъ положительной оси X-овъ.

Подобныя значенія имѣютъ и оба другія уравненія.

§ 8. Пусть s_1 есть разстояніе по траэкторіи движущейся точки отъ точки S_0 въ моментъ t_1, и s_2 — подобная же величина опредѣляющая положеніе точки въ моментъ t_2.

Разность $(s_2 - s_1)$ представляетъ *перемѣщеніе* точки по траэкторіи изъ того положенія, которое она имѣла въ моментъ t_1, въ то положеніе, которое она имѣетъ въ моментъ t_2; перемѣщеніе можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ и можетъ быть равно нулю, хотя точка и имѣла движеніе въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$.

Такъ въ примѣрѣ 8-мъ перемѣщеніе за время отъ $t = O$ до $t = \frac{T}{2}$ равно нулю, хотя въ теченіи этого времени точка имѣла движеніе отъ $s = O$ до $s = A$ и обратно и длина всего пути, пройденнаго точкою въ теченіи этого промежутка времени, равна $2A$.

Длина пути, проходимаго точкою въ теченіи какого либо

промежутка времени, есть величина во всякомъ случаѣ положительная, хотя бы перемѣщеніе было отрицательнымъ; если точка совершила хотя какое нибудь движеніе въ теченіи этого промежутка времени или части его, то длина пути не можетъ быть равна нулю.

Если движеніе совершалось въ теченіи разсматриваемаго промежутка времени только въ одномъ направленіи по траэкторіи, то *длина пути* и *перемѣщеніе* могутъ различаться только знакомъ, но не абсолютною величиною; длина пути есть величина всегда положительная, а перемѣщеніе можетъ быть и отрицательнымъ, если направленіе движенія было въ отрицательную сторону траэкторіи.

Другое дѣло если направленіе движенія мѣнялось въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени; раздѣливъ движеніе на части тѣми моментами, въ которые направленіе движенія измѣнялось въ противоположное, мы должны будемъ взять алгебраическую сумму положительныхъ и отрицательныхъ перемѣщеній, совершившихся въ теченіи всѣхъ этихъ частей движенія, если пожелаемъ составить изъ нихъ перемѣщеніе за весь промежутокъ времени; если же потребуется опредѣлить длину пути, пройденнаго въ теченіи всего промежутка, то должны будемъ взять сумму абсолютныхъ, положительно взятыхъ, величинъ частныхъ перемѣщеній.

Напримѣръ, если точка двигалась безъ перемѣны направленія отъ M_1 (черт. 11 bis) (гдѣ она находилась въ моментъ t_1) до M_2 (моментъ t_2), затѣмъ, перемѣнивъ здѣсь направленіе движенія, до M_3 (моментъ t_3), и, послѣ новой перемѣны направленія, до M_4 (моментъ t_4), то, при указанномъ стрѣлкою положительномъ направленіи, частныя перемѣщенія въ промежутки времени: $(t_2 - t_1)$, $(t_3 - t_2)$, $(t_4 - t_3)$ будутъ:

$(s_2 - s_1)$, $(s_3 - s_2)$, $(s_4 - s_3)$, гдѣ $s_1 =$ дугѣ $\overset{\frown}{S_0M_1}$, $s_2 = \overset{\frown}{S_0M_2}$, $s_3 = \overset{\frown}{S_0M_3}$, $s_4 = S_0M_4$; первая и третья разность положительны, вторая же — отрицательна: перемѣщеніе за промежутокъ времени $t_4 - t_1$ будетъ $(s_4 - s_3) + (s_3 - s_2) + (s_2 - s_1) = s_4 - s_1$, т. е. равно длинѣ дуги M_1M_4, а длина пути будетъ равна:

$$(s_4 - s_3) + (s_2 - s_3) + (s_2 - s_1),$$

I-8.9.

т.-е. равна суммѣ длинъ дугъ:

$$\overset{\frown}{M_3M_4},\quad \overset{\frown}{M_3M_2},\quad \overset{\frown}{M_1M_2},$$

или равна дугѣ $(\overset{\frown}{M_1M_4} + 2\,.\,\overset{\frown}{M_2M_3})$; дѣйствительно: дуги $\overset{\frown}{M_1M_2}$ и $\overset{\frown}{M_2M_4}$ точка пробѣжала по одному разу, а дугу M_2M_3 она пробѣжала *три* раза.

§ 9. *Среднею скоростью въ пути, совершаемомъ точкою въ теченіи промежутка времени* (t_2-t_1), *называется отношеніе между длиною пути* l, *пробѣгаемаго точкою въ теченіи этого промежутка времени и величиною самаго промежутка;* т.-е.: Средняя скорость. Единицы скорости.

$$(\text{Средняя скорость въ пути}) = \frac{l}{t_2-t_1}.$$

Это есть величина всегда положительная.

Средняя скорость измѣряется особыми сложными единицами— *единицами скорости*

Изъ величинъ различнаго рода, разсматриваемыхъ въ Механикѣ, величины длинъ, временъ и массъ измѣряются простыми единицами, всѣ же прочія величины измѣряются сложными единицами.

Единицы длинъ, времени и массъ могутъ имѣть различную величину: т.-е. за единицу длины можно взять километръ, метръ, сантиметръ, и др., за единицу времени сутки, часъ, минуту или секунду средняго или звѣзднаго времени; произвольна также и единица массы; при выраженіи какихъ либо длинъ, временъ или массъ въ числахъ, должно быть означено также и наименованіе принятой единицы.

Единицы же сложныя, которыми измѣряются прочія величины, встрѣчающіяся въ Аналитической механикѣ, вполнѣ опредѣляются величинами единицъ длины, времени и массы.

Единица средней скорости принадлежитъ къ числу такихъ сложныхъ единицъ.

Пусть l длина пути, заключаетъ въ себѣ L единицъ длины, а величина промежутка времени (t_2-t_1) заключаетъ τ единицъ времени (L и τ суть отвлеченныя количества цѣлыя или дробныя); по приведенному опредѣленію, средняя скорость пути равна:

I-9.

$$\frac{L\times(\text{единица длины})}{\tau\times(\text{единица времени})}=\frac{L}{\tau}\times\left[\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}\right]$$

т. е. эта средняя скорость въ $\frac{L}{\tau}$ разъ болѣе той средней скорости при которой длина пути, пройденнаго въ единицу времени, равна единицѣ длины.

Если направленіе движенія по траэкторіи не измѣняется и величина отношенія $\frac{L}{\tau}$ одна и таже для всѣхъ и всякихъ промежутковъ времени $(t_2 - t_1)$, какъ бы велики или малы они ни были, то такое движеніе называется *равномѣрнымъ*.

Выраженіе:

$$\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}$$

есть символъ единицы средней скорости; это есть величина вполнѣ опредѣленная, коль скоро извѣстно, что принято за единицу длины и что за единицу времени.

Напримѣръ, если

единица длины $=$ метру

единица времени $=$ секундѣ средн. врем.,

то *единица средней скорости есть та средняя скорость*, *которую имѣетъ равномѣрное движеніе точки въ томъ случаѣ, когда въ каждую секунду средняго времени пробѣгается одинъ метръ длины пути.*

Отношеніе:

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$$

можетъ быть равнымъ или неравнымъ средней скорости въ пути, совершаемомъ въ теченіи того же промежутка времени; мы будемъ называть это отношеніе *среднею скоростью перемѣщенія по положительному направленію траэкторіи въ теченіи промежутка времени* $t_2—t_1$.

Такъ, если точка движется по оси X-овъ, то *средняя скорость перемѣщенія по положительному направленію оси X-овъ въ теченіи промежутка времени $t_2—t_1$ будетъ представляться отношеніемъ:*

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

а) Если движеніе въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$ направлено неизмѣнно по положительному направленію траэкторіи, то средняя скорость перемѣщенія есть величина положительная и равна средней скорости пути, т. е.

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{l}{t_2 - t_1}.$$

б) Если движеніе въ теченіи этого промежутка времени направлено неизмѣнно по отрицательному направленію траэкторіи, то средняя скорость перемѣщенія есть величина, равная отрицательно взятой средней скорости пути, т. е.

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = - \frac{l}{t_2 - t_1}.$$

в) Если движеніе измѣняетъ направленіе по траэкторіи въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$, то средняя скорость перемѣщенія можетъ имѣть знакъ положительный или отрицательный; во всякомъ случаѣ она *тогда не равна средней скорости пути.*

§ 10. Означимъ черезъ ϑ величину промежутка времени $(t_2 - t_1)$, такъ что $t_2 = t_1 + \vartheta$; чрезъ $l\,(t_1 + \vartheta,\ t_1)$ означимъ длину пути, которую прежде обозначали просто черезъ l; перемѣщеніе придется теперь обозначать черезъ $(s_{t_1+\vartheta} - s_{t_1})$. Скорость величина и направление

При уменьшеніи величины ϑ промежутка времени, *величина средней скорости въ пути* будетъ измѣняться, если движеніе неравномѣрно; при приближеніи ϑ къ нулю, величина ея будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу, называемому *величиною скорости точки въ моментъ* t_1.

Величина скорости v точки въ какой либо моментъ времени t есть предѣлъ, къ которому приближается средняя скорость въ пути, совершаемомъ точкою въ теченіи промежутка времени, начинающагося въ моментъ t, при уменьшеніи величины промежутка до нуля; т. е.

$$v = \text{предѣлу} \left[\frac{l\,(t+\vartheta,\ t)}{\vartheta}\right]_{\vartheta = 0}$$

I-10.

это величина всегда положительная; она измѣряется единицею средней скорости, почему послѣднюю мы будемъ называть просто *единицею скорости.*

Величину предѣла, къ которому при этомъ приближается средняя скорость *перемѣщенія,* мы будемъ называть *скоростью точки въ моментъ t по положительному направленію траэкторіи.*

То есть:

скорость въ моментъ t по положительному направленію траэкторіи =

$$= \text{предѣлу} \left[\frac{s_{t+\vartheta} - s_t}{\vartheta}\right]_{\vartheta = o}.$$

Пользуясь обозначеніями дифференціальнаго исчисленія и обозначая ϑ приближающееся къ нулю черезъ dt, а $(s_{t+\vartheta} - s_t)$, приближающееся къ нулю черезъ ds, мы можемъ скорость по положительному направленію траэкторіи представить подъ видомъ производной:

$$\frac{ds}{dt}.$$

Если, напримѣръ, точка движется по оси X, то производная

$$\frac{dx}{dt}$$

представляетъ для даннаго момента t времени *скорость точки по положительной оси X въ моментъ t; мы будемъ выражаться короче: скорость по оси X* въ моментъ t.

Если x есть координата точки въ моментъ t и если точка бываетъ въ положеніи, опредѣляемомъ этою координатою, только одинъ разъ въ теченіи всего движенія, то не будетъ никакой неопредѣленности если мы скажемъ, что $\frac{dx}{dt}$ есть *скорость по оси X* въ точкѣ, опредѣляемой координатою x.

Въ движеніи:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)$$

величины производныхъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1'(t) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2'(t) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3'(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

суть *скорости въ моментъ t по осямъ X, $У$ и Z проэкцій движущейся точки на эти оси.*

При приближеніи промежутка ϑ къ нулю, мы рано или поздно дойдемъ до такой величины его $(\overline{\vartheta})$, при которой движеніе, въ теченіи его, не мѣняетъ своего направленія; разъ это достигнуто, то можно быть увѣреннымъ, что направленіе движенія будетъ неизмѣнное и тоже самое внутри всѣхъ промежутковъ меньшихъ $(\overline{\vartheta})$, какъ бы малы они ни были; на этомъ основаніи (имѣя въ виду сказанное въ пунктахъ *а* и *б* параграфа 9-го) мы можемъ сказать слѣдующее относительно *скорости v и скорости по положительному направленію траэкторіи.*

Скорость v есть абсолютная величина скорости по положительному направленію траэкторіи.

Если движеніе въ разсматриваемый моментъ совершается въ положительномъ направленіи траэкторіи, то:

$$v = \frac{ds}{dt};$$

если же движеніе въ разсматриваемый моментъ совершается въ отрицательномъ направленіи траэкторіи, то

$$v = -\frac{ds}{dt}.$$

Когда извѣстно положительное направленіе траэкторіи, то, зная скорость по положительному направленію въ какой либо точкѣ, мы будемъ вмѣстѣ съ величиною v знать и направленіе движенія въ этой точкѣ.

I-10.11.

Понятно, что *направленіе движенія въ какой либо точкѣ траэкторіи направлено по касательной къ кривой въ этой точкѣ.*

Часто случается, преимущественно при криволинейномъ движеніи, что не дѣлается условія относительно положительнаго направленія траэкторіи; тогда, разсуждая о скорости, надо знать направленіе движенія; если δs *есть безконечно малое перемѣщеніе, въ теченіи безконечно малаго времени* dt, *въ направленіи движенія*, то:

$$v = \frac{\delta s}{dt};$$

(δs имѣетъ всегда положительное значеніе).

Впрочемъ и въ этихъ случаяхъ пишутъ ds вмѣсто δs, что будемъ дѣлать и мы во многихъ случаяхъ криволинейнаго движенія, не упуская однако изъ виду направленія движенія.

§ 11. На основаніи вышесказаннаго, если извѣстна траэкторія и положеніе движущейся точки на ней выражено въ функціи времени:

$$s = f(t),$$

то мы можемъ прямо найти выраженіе въ функціи времени скорости по положительному направленію траэкторіи:

$$\frac{ds}{dt} = f'(t),$$

и такимъ образомъ будемъ знать величину скорости и направленіе движенія въ каждый моментъ, а слѣдовательно и въ каждой точкѣ траэкторіи.

стр. 14 Въ примѣрѣ 8-мъ:

$s = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ $$\frac{ds}{dt} = \frac{2\pi A}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Положимъ, что $A = 10$ mm., (10 миллиметрамъ); A представляетъ величину полуразмаха въ колебательномъ движеніи, разсматриваемомъ въ этомъ примѣрѣ; продолжительность колебанія T мы положимъ равною 0,4 sec. ($^2/_5$ секунды); опредѣлимъ величину наибольшей скорости, которую имѣетъ точка въ этомъ движеніи. Наибольшую скорость точка будетъ имѣть при $\cos\frac{2\pi}{T}t = +1$ или (-1), то есть въ моменты:

$$t = 0;\ t = \frac{T}{2};\ t = T;\ t = \frac{3T}{2}\ \text{и т. д.};$$

въ эти моменты точка будетъ въ S_0 и величина скорости, независимо отъ знака, будетъ;

$$2\,\frac{3{,}141 \times 10}{0{,}4} \times \frac{(\text{миллиметръ})}{(\text{секунда средн. врем.})},$$

или

$$157{,}05 \times \frac{(\text{миллиметръ})}{(\text{сек. ср. врем.})},$$

т.-е. въ 157 съ дробью разъ болѣе слѣдующей единицы скорости

$$\frac{(\text{миллиметръ})}{(\text{сек. ср. врем.})}.$$

Если за единицу длины мы возьмемъ метръ, длину въ 1000 разъ большую миллиметра, то та же самая скорость представится такъ:

$$0{,}15705 \times \frac{(\text{метръ})}{(\text{секунда})}$$

новая единица скорости:

$$\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$$

въ 1000 разъ болѣе прежней, а число, показывающее сколько такихъ единицъ заключается въ разсматриваемой скорости, уменьшилось во столько же разъ.

Если мы возьмемъ минуту ср. врем. за единицу времени, то новая единица скорости:

$$\frac{(\text{метръ})}{(\text{минута})}$$

будетъ въ 60 разъ менѣе предъидущей, причемъ величина той же скорости изобразится такъ:

$$9{,}423\,\frac{\text{метръ}}{\text{минута}};$$

численная величина, входящая здѣсь, въ 60 разъ болѣе численной величины 0,15705 предъидущаго выраженія той же скорости.

Когда движеніе выражается тѣмъ, что задаются или становятся извѣстными функціи $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, представляющія законъ измѣне-

I-11.

нія координатъ точки, то величина скорости v и направленіе движенія въ каждый моментъ опредѣляются слѣдующимъ образомъ.

Дифференціалъ δs — элементъ дуги, пройденный точкою въ теченіи элемента времени dt, выражается при употребленіи прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ положительно взятымъ корнемъ:

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

поэтому величина скорости v можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$v = \frac{\delta s}{dt} = + \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

т.-е. скорость движущейся точки равна положительно взятому корню изъ суммы квадратовъ скоростей проэкцій ея на оси координатъ X, $У$, Z.

Скорости же по осямъ X, $У$, Z проэкцій точки на эти оси выражаются функціями времени по формуламъ (3); поэтому мы имѣемъ выраженіе:

$$v = + \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

представляющее v въ функціи времени.

Подъ направленіемъ элемента δs мы будемъ подразумѣвать то направленіе, по которому его пробѣгаетъ движущаяся точка и которое совпадаетъ съ направленіемъ движенія; мы будемъ означать черезъ:

$$(\delta s, X) \quad (\delta s, У,) \quad (\delta s, Z)$$

углы, составляемые этимъ направленіемъ съ положительными направленіями осей координатъ. Дифференціалы dx, dy, dz, представляющіе приращенія координатъ точки въ теченіи элемента времени dt, суть проекціи элемента δs на положительныя направленія осей координатъ; поэтому:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \delta s \cos(\delta s, X) \\ dy &= \delta s \cos(\delta s, У) \\ dz &= \delta s \cos(\delta s, Z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Раздѣливъ обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ на dt, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(\delta s,X) &= \frac{dx}{dt} \\ v\cos(\delta s,У) &= \frac{dy}{dt} \\ v\cos(\delta s,Z) &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

откуда, на основанiи равенствъ (3) и (5), мы найдемъ выраженiя косинусовъ угловъ, составляемыхъ направленiемъ движенiя съ осями координатъ, въ функцiяхъ времени.

Приложимъ сказанное здѣсь къ примѣрамъ, приведеннымъ въ § 2.

Въ примѣрѣ 1-мъ очевидно направленiе движенiя не измѣняется и скорость:

$$v = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

сохраняетъ постоянную величину; это движенiе прямолинейное и равномѣрное.

Въ примѣръ 2-мъ величина скорости измѣняется съ теченiемъ времени по слѣдующему закону:

$$v = +\sqrt{\alpha^2+g^2t^2};$$

она непрерывно возрастаетъ; уголъ, составляемый направленiемъ движенiя съ осью X имѣетъ косинусъ:

$$\cos(\delta s,X) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+g^2t^2}}$$

вначалѣ равный $+1$, а потомъ уменьшающiйся и приближающiйся къ нулю; косинусъ же угла съ осью $У$:

$$\cos(\delta s,У) = \frac{gt}{\sqrt{\alpha^2+g^2t^2}}$$

вначалѣ равенъ нулю, а потомъ увеличивается, приближаясь къ $+1$.

Въ примѣрѣ 3-мъ:

$$v = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\beta gt+g^2t^2}$$

скорость вначалѣ равна $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, затѣмъ уменьшается и имѣетъ наименьшую величину въ тотъ моментъ, когда

$$\frac{dv}{dt}=0$$

т. е.

$$(-\beta g+g^2t_1)=0,$$

слѣдовательно въ моментъ:

$$t_1=\frac{\beta}{g}.$$

Тогда координаты движущейся точки — слѣдующія:

$$x_1=\frac{\alpha\beta}{g}, y_1=-\frac{\beta^2}{2g}.$$

Здѣсь y имѣетъ тоже свою наименьшую величину, а потому направленіе движенія параллельно оси X.

Далѣе, послѣ этого момента, скорость увеличивается безпредѣльно.

§ 12. Обыкновенно скорость v представляютъ, какъ отрѣзокъ линіи, заключающій въ себѣ столько линейныхъ единицъ, сколько въ самой скорости заключается единицъ скорости и отложенный отъ положенія точки по направленію движенія; скорость, представленную такимъ образомъ, мы можемъ проектировать на какое либо направленіе и на какую либо плоскость.

Пусть скорость v заключаетъ въ себѣ n единицъ скорости:

$$v=n\left[\frac{\text{ед. длины}}{\text{ед. времени}}\right];$$

проэкція длины, равной n единицъ длины и отложенной по направленію δs, на ось X, будетъ равна длинѣ:

$$n\cos(\delta s,X) \text{ единицъ длины},$$

представляющей скорость

$$n\cos(\delta s,X)\frac{\text{ед. длины}}{\text{ед. времени}}=v\cos(\delta s,X)$$

въ какомъ либо движеніи, которое въ разсматриваемый моментъ имѣетъ направленіе параллельное положительному направленію оси X, если $\cos(\delta s, X) > 0$ или направленіе противоположное, если $\cos(\delta s, X) < 0$; $[v \cos(\delta s, X)]$ мы называемъ проэкціею скорости на ось X.

До сихъ поръ, говоря о скорости, мы не употребляли выраженія: «направленіе скорости»; отнынѣ мы будемъ употреблять этотъ терминъ, понимая подъ нимъ направленіе движенія, такъ какъ по этому направленію отлагается длина представляющая скорость.

Изъ равенствъ (7) видно, что *проэкція скорости движущейся точки на одну изъ осей координатъ равна скорости по этой оси проэкціи движущейся точки на эту ось.*

Изъ выраженій (4) и (7) слѣдуетъ далѣе, что скорость движущейся точки, представленная отрѣзкомъ линіи, есть діагональ параллелепипеда, построеннаго на длинахъ параллельныхъ осямъ координатъ и представляющихъ скорости $\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt}$; т. е. если ребра MV_1 MV_2, MV_3 (черт. 13) этого параллелепипеда равны и параллельны скоростямъ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, то діагональ представляетъ скорость движущейся точки по величинѣ и по направленію.

§ 13. Координаты x, y, z суть проекціи радіуса вектора OM проведеннаго изъ начала координатъ къ разсматриваемой точкѣ, на оси координатъ, то есть:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(r,X) \\ y &= r\cos(r,Y) \\ z &= r\cos(r,Z) \end{aligned}\right\}$$

(направленіе радіуса вектора r считается отъ начала координатъ къ точкѣ M) (черт. 14)

поэтому равенства (7) можно выразить слѣдующимъ образомъ.

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v,X) &= \frac{d(r\cos(r,X))}{dt} \\ v\cos(v,Y) &= \frac{d(r\cos(r,Y))}{dt} \\ v\cos(v,Z) &= \frac{d(r\cos(r,Z))}{dt} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

т. е. проэкція абсолютной скорости на одну изъ осей координатъ (которыя неподвижны) равна производной по времени отъ проэкціи на ту же ось радіуса вектора, проведеннаго изъ начала координатъ къ движущейся точкѣ.

Подобною же формулою выражается проэкція абсолютной скорости на всякое *неподвижное* направленіе, то есть такое, которое составляетъ съ осями координатъ постоянные углы; пусть P или OP будетъ это направленіе.

Косинусъ угла, составляемаго направленіями v и P другъ съ другомъ, выражается, какъ извѣстно, слѣдующимъ образомъ:

$$\cos(v,P)=\cos(v,X)\cos(P,X)+\cos(v,У)\cos(P,У)+\cos(v,Z)\cos(P,Z)$$

откуда:

$$v\cos(v,P)=v\cos(v,X)\cos(P,X)+v\cos(v,У)\cos(P,У)+v\cos(v,Z)\cos(P,Z)$$

на основаніи формулъ (8):

$$v\cos(v,P)=d\frac{r\cos(rX)}{dt}\cos(P,X)+d\frac{r\cos(rУ)}{dt}\cos(P,У)+$$
$$+d\frac{r\cos(rZ)}{dt}\cos(P,Z); \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

но, такъ какъ $\cos(P,X)$, $\cos(P,У)$, $\cos(P,Z)$ имѣютъ постоянныя, неизмѣняющіяся съ теченіемъ времени величины, то:

$$v\cos(v,P)=\frac{d[r\cos(rX)\cos(PX)+r\cos(rУ)\cos(PУ)+r\cos(rZ)\cos(PZ)]}{dt}$$

или

$$v\cos(v,P)=\frac{dr\cos(rP)}{dt}; \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

т. е. *проэкція скорости абсолютнаго движенія точки на всякое направленіе, неизмѣняющееся съ теченіемъ времени, равна производной по времени отъ проэкціи радіуса вектора движущейся точки на тоже направленіе.*

5. Если точка при своемъ движеніи находится въ постоянномъ разстояніи отъ начала координатъ, т. е. если длина радіуса

вектора остается постоянною, то проэкція скорости такой точки на неизмѣнное направленіе выражается формулою.

$$v \cos (vP) = r \frac{d \cos (rP)}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Понятно, что траэкторія, описываемая такою точкою, есть кривая, расположенная на поверхности сферы радіуса r и что скорость и радіусъ векторъ взаимно перпендикулярны.

Если радіусъ векторъ постоянно равенъ единицѣ, то проэкціи скорости движущейся точки на осяхъ координатъ выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} v_u \cos (v_u, X) &= \frac{d \cos (uX)}{dt} \\ v_u \cos (v_u, Y) &= \frac{d \cos (uY)}{dt} \\ v_u \cos (v_u, Z) &= \frac{d \cos (uZ)}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Здѣсь u означаетъ направленіе радіуса вектора и v_u скорость точки, радіусъ векторъ которой постоянно равенъ единицѣ.

B. Проэкція скорости на направленіе, измѣняющееся одновременно съ движеніемъ точки, выражается формулами болѣе сложными, чѣмъ предыдущія.

Пусть U есть такое направленіе; на основаніи формулы (9) мы имѣемъ:

$$v \cos (vU) = \frac{d(r \cos (rX))}{dt} \cos (U,X) + \frac{d(r \cos (r,Y))}{dt} \cos (U,Y) + \\ + \frac{d(r \cos (r,Z))}{dt} \cos (U,Z);$$

но такъ какъ $\cos (U,X)$, $\cos (U,Y)$, $\cos (U,Z)$ суть величины перемѣнныя съ теченіемъ времени, то мы можемъ произвести слѣдующія преобразованія:

$$\frac{d(r \cos(rX))}{dt} \cos(U,X) = \frac{d[r \cos(rX) \cos(U,X)]}{dt} - r \cos(r,X) \frac{d \cos(U,X)}{dt}$$

и подобныя же для прочихъ двухъ произведеній; а потому:

I-13.

$$v\cos(v,U) = \frac{d[r\cos(r,X)\cos(U,X)+r\cos(r,Y)\cos(U,Y)+r\cos(r,Z)\cos(U,Z)]}{dt} -$$

$$- r\left[\cos(r,X)\frac{d\cos(U,X)}{dt} + \cos(r,Y)\frac{d\cos(U,Y)}{dt} + \cos(r,Z)\frac{d\cos(U,Z)}{dt}\right].$$

Представимъ себѣ, что изъ начала координатъ проведенъ вспомогательный радіусъ векторъ, длины равной единицѣ и параллельный направленію U; пусть v_u есть скорость точки, находящейся на концѣ этого радіуса вектора; на основаніи формулъ (13) мы можемъ замѣнить въ послѣднемъ равенствѣ производныя:

$$\frac{d\cos(U,X)}{dt}, \quad \frac{d\cos(U,Y)}{dt}, \quad \frac{d\cos(U,Z)}{dt}$$

величинами:

$$v_u\cos(v_u,X), \quad v_u\cos(v_u Y), \quad v_u\cos(v_u,Z),$$

тогда проэкція скорости на направленіе U представится подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v\cos(vU) = \frac{d\,(r\cos(rU))}{dt} - rv_u\cos(rv_u)\,; \quad \ldots \quad (14)$$

секціо корніз § 69 293.

то есть: *проэкція скорости какой либо движущейся точки на направленіе, измѣняющееся одновременно съ движеніемъ точки, равняется производной по времени отъ проэкціи на подвижное направленіе радіуса вектора движущейся точки, уменьшенной на величину произведенія изъ радіуса вектора и проэкціи на него скорости* v_u.

Скорость v_u перпендикулярна къ направленію U.

Намъ придется пользоваться формулою (14).

Г. Проэкція скорости на какую либо неподвижную плоскость П равна:

$$v_\pi = v\sin(v,N)$$

гдѣ N—направленіе нормали къ этой плоскости.

Напримѣръ, проэкціи скорости на плоскостяхъ координатъ:

$$XY, \; YZ, \; ZX$$

равны:

I-13,14.

$$\left.\begin{aligned} v_{xy} &= v\sin(v,Z) \\ v_{yz} &= v\sin(v,X) \\ v_{zx} &= v\sin(v,Y) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

но это даетъ намъ только величину, но не направленіе каждой проэкціи; чтобы знать положеніе v_π въ плоскости П, надо знать величины проэкцій v_π на два взаимно перпендикулярныя направленія, проведенныя въ этой плоскости; пусть MH (черт. 15) будетъ одно изъ этихъ направленій; проэкція v_π на него будетъ равна

$$v_\pi\cos(v_\pi,H) = v\sin(v,N)\cos(v_\pi,H) = v\cos(VMV_1)\cos(V_1MH)$$

а такъ какъ сферическій треугольникъ, образуемый направленіями v, v_π и MH имѣетъ прямой уголъ при вершинѣ V_1, то:

$$\cos(VMV_1)\cos(V_1MH) = \cos(VMH),$$

поэтому:

$$v_\pi\cos(v_\pi H) = v\cos(VMH) \dots\dots\dots \quad (16)$$

Такимъ образомъ, напримѣръ:

$$\left.\begin{aligned} v_{xy}\cos(v_{xy},X) &= v\cos(vX) \\ v_{xy}\cos(v_{xy},Y) &= v\cos(vY) \end{aligned}\right\} \dots\dots \quad (17)$$

Слѣдовательно проэкція скорости на плоскость XY есть діагональ прямоугольника, построеннаго на сторонахъ равныхъ и параллельныхъ проэкціямъ скорости на оси координатъ X и Y.

§ 14. Когда положеніе точки выражается сферическими координатами, то дифференціалъ δs выражается положительно взятымъ корнемъ:

$$\delta s = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi(d\psi)^2} \ *)$$

гдѣ r, φ и ψ суть координаты того конца дуги δs, въ которомъ дви-

*) Доказывается въ приложеніи дифференціальнаго исчисленія къ геометріи.

1-14.

жущаяся точка вступаетъ на этотъ элементъ пути, dr, $d\varphi$, $d\psi$, суть приращенія, которыя, получаютъ координаты r φ, ψ при перемѣщеніи движущейся точки до другаго конца элемента δs.

Поэтому въ этихъ координатахъ величина скорости v можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2} \quad \dots\dots (18)$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ касательною къ траэкторіи, а слѣдовательно и скоростью v, въ точкѣ (r, φ, ψ), съ координатными осями α, β, γ, выражаются слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} \cos(v,\alpha) &= \frac{dr}{\delta s} \\ \cos(v,\beta) &= \frac{rd\varphi}{\delta s} \\ \cos(v,\gamma) &= r\sin\varphi\,\frac{d\psi}{\delta s} \end{aligned}\right\} *);$$

отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v,\alpha) &= \frac{dr}{dt} \\ v\cos(v,\beta) &= r\frac{d\varphi}{dt} \\ v\cos(v,\gamma) &= r\sin\varphi\,\frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (19)$$

Такимъ образомъ мы получили выраженія проэкцій скорости на подвижныхъ направленіяхъ — координатныхъ осяхъ α, β, γ,

Изъ выраженій (18) и (19) видно, что скорость v, движущейся точки M, совпадаетъ по величинѣ и направленію съ діагональю параллелепипеда (черт. 16), имѣющаго вершину въ M и три ребра MA, MB, $M\Gamma$—по координатнымъ осямъ α, β, γ точки M; величины этихъ реберъ суть: $MA = \frac{dr}{dt}$; $MB = r\frac{d\varphi}{dt}$; $M\Gamma = r\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}$;

*) Доказываются въ приложеніи дифференціальнаго исчисленія къ геометріи.

I-14.

если которая либо изъ величинъ: $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\varphi}{dt}$, $r\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}$ отрицательная, то соотвѣтственное ребро откладывается отъ M въ отрицательную сторону по соотвѣтственной координатной оси.

Б. Въ полярныхъ координатахъ на плоскости величина скорости выражается такъ:

$$v = +\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

а проэкціи ея на координатныхъ осяхъ: α и β

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v\alpha) &= \frac{d\rho}{dt} \\ v\cos(v\beta) &= \rho\frac{d\theta}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20\text{ bis})$$

Скорость совпадаетъ, по величинѣ и направленію, съ діагональю прямоугольника имѣющаго стороны $MA = \frac{d\rho}{dt}$ и $MB = \rho\frac{d\theta}{dt}$ (черт. 17).

В. Въ цилиндрическихъ координатахъ дифференціалъ дуги δs выражается положительнымъ корнемъ:

$$\sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2 + (dz)^2}$$

и косинусы угловъ, составляемыхъ касательною съ координатными осями α, β, γ (см. черт. 7) выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\cos(\delta s, \alpha) = \frac{d\rho}{\delta s}$$

$$\cos(\delta s, \beta) = \frac{\rho d\theta}{\delta s}$$

$$\cos(\delta s, \gamma) = \frac{dz}{\delta s}$$

поэтому величина скорости выражается такъ:

$$v = +\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \ldots \quad (21)$$

I-14.

направленіе же ея опредѣляется по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v,\alpha) &= \frac{d\rho}{dt} \\ v\cos(v,\beta) &= \rho\frac{d\theta}{dt} \\ v\cos(v,\gamma) &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Послѣдними формулами выражаются проэкціи скорости на осяхъ координатъ α, β, γ.

Формулы (21) и (22) выражаютъ, что скорость v совпадаетъ, по величинѣ и направленію, съ діагональю параллелепипеда, построеннаго на ребрахъ $\frac{d\rho}{dt}$, $\rho\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ отложенныхъ по координатнымъ осямъ α, β, γ.

Г. При выводѣ формулъ (18), (19), (20), (20 bis), (21), (22), мы основывались на приведенныхъ безъ доказательства выраженіяхъ для δs и для косинусовъ угловъ составляемыхъ касательною съ координатными осями, такъ какъ эти выраженія выводятся въ приложеніи дифференціальнаго исчисленія къ геометріи; но тѣ же самыя формулы могутъ быть выведены еще и другими путями.

Можно, напримѣръ, перейти отъ формулы (4) къ формулѣ (21), выразивъ координаты x и y въ полярныхъ координатахъ ρ и θ; дѣйствительно, такъ какъ

$$y = \rho\sin\theta;\ x = \rho\cos\theta \text{ (какъ видно изъ чертежа 7)},$$

то:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\theta + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt};$$

по возвышеніи въ квадратъ и по сложеніи получимъ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Для другаго примѣра подобныхъ преобразованій мы покажемъ какъ перейти отъ формулъ (7) къ формулѣ:

$$v\cos(v\gamma)=r\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}.$$

Во первыхъ:

$$v\cos(v\gamma)=v\cos(vX)\cos(\gamma X)+v\cos(vY)\cos(\gamma Y)+v\cos(vZ)\cos(\gamma Z)=$$
$$=\frac{dx}{dt}\cos(\gamma X)+\frac{dy}{dt}\cos(\gamma Y)+\frac{dz}{dt}\cos(\gamma Z).$$

Ось γ параллельна плоскости XY (черт. 18), слѣдовательно $\cos(\gamma Z)=0$; если проведемъ черезъ начала координатъ O (полюсъ) направленіе $O\Gamma$, параллельное этой оси, то оно будетъ перпендикулярно къ линіи OQ, такъ какъ сама ось γ перпендикулярна къ меридіальной плоскости PMQ, въ которой заключается точка M; поэтому:

$$\cos(\gamma X)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)=-\sin\psi$$
$$\cos(\gamma Y)=\cos\psi.$$

Во вторыхъ

$$x=r\sin\varphi\cos\psi;\quad y=r\sin\varphi\sin\psi;$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\varphi\cos\psi+r\cos\varphi\cos\psi\frac{d\varphi}{dt}-r\sin\varphi\sin\psi\frac{d\psi}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\varphi\sin\psi+r\cos\varphi\sin\psi\frac{d\varphi}{dt}+r\sin\varphi\cos\psi\frac{d\psi}{dt};$$

помноживъ первое на $(-\sin\psi)$, второе на $(\cos\psi)$ и сложивъ, мы получимъ:

$$r\sin\varphi\frac{d\psi}{dt};$$

слѣдовательно:

$$v\cos(v\gamma)=r\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}.$$

Подобными преобразованіями могутъ быть выведены и всѣ прочія формулы.

I-14.

D. Выраженія для проэкцій скорости на координатныхъ осяхъ, измѣняющихъ свое направленіе, могутъ быть получены изъ формулы (14); для примѣра мы выведемъ такимъ образомъ выраженія (20 bis).

Направленіе оси α совпадаетъ съ направленіемъ радіуса вектора ρ, поэтому $\cos(\rho\alpha) = 1$; на радіусѣ векторѣ возьмемъ точку A (черт. 19), отстоящую отъ O на единицу длины, и назовемъ черезъ v_A скорость этой точки; такъ какъ v_A перпендикулярна къ OA, а слѣдовательно, къ ρ или α, то $\cos(v_A, \alpha) = 0$; вслѣдствіе всего сказаннаго, выраженіе

$$v \cos(v, \alpha) = \frac{d\rho \cos(\rho\alpha)}{dt} - \rho v_A \cos(\rho v_A),$$

которое представляетъ собою формула (14), примѣненная къ оси α, получитъ слѣдующій видъ:

$$v \cos(v\alpha) = \frac{d\rho}{dt}.$$

Проэкція скорости на ось β выражается по формулѣ (14) слѣдующимъ образомъ:

$$v \cos(v\beta) = \frac{d(\rho \cos(\rho\beta))}{dt} - \rho v_B \cos(\rho v_B),$$

гдѣ v_B есть скорость точки B отстоящей отъ O на длину $= 1$, пручемъ направленіе OB параллельно оси β; такъ какъ v_B перпендикулярно къ OB, а OB или β перпендикулярно къ ρ, то v_B параллельно радіусу ρ; при томъ легко видѣть, что направленіе v_B противоположно направленію α, если уголъ θ увеличивается при движеніи точки M; величина же скорости v_B равна $\frac{d\theta}{dt}$, потому что элементъ пути точки B равенъ $1 . d\theta$; изъ всего этого слѣдуетъ, что

$$\cos(\rho, \beta) = 0, \; v_B \cos(\rho v_B) = -\frac{d\theta}{dt};$$

поэтому

$$v \cos(v\beta) = \rho \frac{d\theta}{dt}.$$

Приведемъ примѣры примѣненія формулъ (18—22).

Въ примѣрѣ 4-мъ

$$v \cos(v\alpha) = a$$

$$v \cos(v\beta) = at.\frac{2\pi}{T}$$

$$v = +\sqrt{a^2 + a^2t^2\frac{4\pi^2}{T^2}} = a\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi t}{T}\right)^2}.$$

Проэкція скорости на радіусъ векторъ имѣетъ постоянную величину, сама же скорость непрерывно возрастаетъ съ теченіемъ времени.

Въ примѣрѣ 5-мъ

$$v \cos(v\alpha) = Ane^{nt}$$

$$v \cos(v\beta) = \frac{2\pi}{T}Ae^{nt}$$

$$v = Ae^{nt}\sqrt{n^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2};$$

слѣдовательно:

$$\cos(v\alpha) = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}},$$

то есть скорость составляетъ съ радіусомъ векторомъ постоянный уголъ.

Въ примѣрѣ 6-мъ

$$v \cos(v\alpha) = 0$$

$$v \cos(v\beta) = Ra$$

$$v \cos(v\gamma) = R\sin(\varphi_0 + at).\left[\frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\varphi_0 + at)}\right] = aR\operatorname{tg}\alpha;$$

отсюда получимъ:

$$v = aR\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{aR}{\cos\alpha};$$

I-14.15.

т. е. скорость имѣетъ постоянную величину; далѣе

$$\cos(v\beta) = \cos\alpha$$

$$\cos(v\gamma) = \sin\alpha,$$

т. е. она составляетъ постоянный уголъ α съ осью β.

Въ примѣрѣ 7-мъ

$$v\cos(v\alpha) = 0$$

$$v\cos(v\beta) = R\frac{2\pi}{T}$$

$$v\cos(v\gamma) = \frac{h}{T}$$

$$v = \sqrt{\frac{h^2 + (2\pi R)^2}{T^2}};$$

скорость имѣетъ постоянную величину и постоянное наклоненіе къ осямъ β и γ; она перпендикулярна къ оси α.

§ 15. Для нагляднаго представленія закона измѣненія величины и направленія скорости въ какомъ либо криволинейномъ движеніи, пользуются слѣдующимъ построеніемъ:

Изъ начала координатъ или изъ другой неподвижной точки проводятъ радіусъ векторъ OU, измѣняющій длину и направленіе одновременно съ движеніемъ точки по кривой такимъ образомъ, чтобы длина его u была всегда равна величинѣ скорости v и чтобы направленіе его было параллельно направленію ея; конецъ U этого радіуса вектора опишетъ кривую линію, называемую *Годографомъ* (Hodograph) (черт. 20).

Законъ измѣненія скорости представляется измѣненіями радіуса вектора этой кривой, поэтому недостаточно знать видъ кривой, но необходимо также знать и положеніе точки O, изъ которой проведены ея радіусы векторы.

При прямолинейномъ движеніи годографъ есть прямая линія параллельная той, по которой совершается движеніе.

Если движеніе не только прямолинейно, но и равномѣрно, то го-

1-15.

дографъ есть точка, радіусъ векторъ которой равенъ и параллеленъ скорости; такъ въ примѣрѣ 1-мъ координаты этой точки суть:

$$x = \alpha;\ y = \beta;\ z = \gamma.$$

Вообще прямоугольныя прямолинейныя координаты конца радіуса вектора u, т. е. координаты точекъ U годографа, равны проэкціямъ скорости на осяхъ координатъ; мы означимъ координаты эти черезъ $x'y'z'$, т. е. тѣми же знаками, какими принято означать производныя отъ x, y, z, такъ какъ и въ самомъ дѣлѣ координаты точки U равны производнымъ координатъ движущейся точки по времени.

$$x' = \frac{dx}{dt} = v \cos(vX) = u \cos(uX)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = v \cos(vY) = u \cos(uY)$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = v \cos(vZ) = u \cos(uZ).$$

Если движеніе точки извѣстно, то $x'y'z'$ будутъ извѣстными функціямѣ времени:

$$x' = f_1'(t),\ y' = f_2'(t);\ z' = f_3'(t);$$

исключивъ изъ этихъ равенствъ время t, мы получимъ два уравненія годографа.

Въ примѣвѣ 2-мъ

$$x' = \alpha$$

$$y' = gt.$$

Первое изъ этихъ уравненій:

$$x' = \alpha,$$

незаключающее времени t, есть уравненіе годографа; это есть прямая линія параллельная оси $У$ и отстоящая отъ нея въ разстояніи α.

I-15.

Въ примѣрѣ 3-мъ:

$$x' = \alpha$$

$$y' = gt - \beta$$

годографомъ служитъ та же прямая; различіе заключается въ положеніи точки U въ тотъ же моментъ t, а именно: въ примѣрѣ 2-мъ $y' = gt$, а въ примѣрѣ 3-мъ $y' = gt - \beta$.

Если движеніе происходитъ равномѣрно по окружности, то годографъ есть кругъ (черт. 21), имѣющій центръ въ началѣ координатъ и радіусъ равный скорости.

Годографъ равномѣрнаго движенія по какой бы то ни было кривой есть кривая расположенная на сферѣ, имѣющей центръ въ началѣ координатъ и радіусъ равный скорости.

Такъ въ примѣрѣ 7-мъ годографъ есть кругъ служащій основаніемъ прямому конусу (черт. 22), имѣющему вершину въ O, осью — ось Z и, производящія котораго наклонены къ оси подъ угломъ $= arctg\left(\frac{2\pi R}{h}\right)$; длина радіуса вектора годографа равна

$$u = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{T}.$$

Въ примѣрѣ 5-мъ уравненіе годографа можно получить слѣдующимъ образомъ:

Радіусъ векторъ u годографа равенъ v, т. е.

$$u = Ae^{nt}\sqrt{n^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ годографа съ осью α имѣетъ постоянную величину равную

$$\arccos\frac{n}{\sqrt{n^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}} = \operatorname{arctg}\frac{2\pi}{Tn};$$

ось же α составляетъ съ полярною осью уголъ $\theta = \frac{2\pi}{T}t$.

Поэтому радіусъ векторъ годографа составляетъ съ полярною осью уголъ ϑ (черт. 23) равный суммѣ этихъ угловъ т. е.

$$\vartheta = \frac{2\pi t}{T} + \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{Tn} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (24)$$

по исключеніи времени t изъ уравненій (23) и (24) мы получимъ уравненіе годографа въ полярныхъ координатахъ:

$$u = Be^{\frac{nT}{2\pi}\vartheta}, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (25)$$

гдѣ

$$B = A\sqrt{n^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\, e^{-\frac{nT}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{nT}}$$

т. е. годографъ есть тоже логариѳмическая спираль и притомъ того же самаго вида какъ и траэкторія:

$$\rho = Ae^{\frac{nT}{2\pi}\vartheta};$$

но разнящаяся отъ нея положеніемъ.

Мы возьмемъ еще одинъ примѣръ опредѣленіе вида годографа.

Примѣръ 10. Движеніе выражается въ полярныхъ координатахъ слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= a(1 - e\cos f) \\ \vartheta &= 2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \operatorname{tg}\frac{1}{2} f\right] \end{aligned}\right\}; \, . \, . \, . \, . \quad (26)$$

гдѣ $e < 1$, а f есть нѣкоторая функція времени, неявно выражаемая слѣдующимъ уравненіемъ:

$$f - e\sin f = nt \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (26 \text{ bis})$$

A. Для того, чтобы составить уравненіе траэкторіи движенія, надо исключить f изъ уравненій (26); это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Извѣстно, что

$$\cos f = \cos^2\frac{f}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{f}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{f}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{f}{2}};$$

1-15.

второе изъ уравненій (26) даетъ:

$$\operatorname{tg}^2\frac{f}{2}=\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2};$$

поэтому:

$$\cos f=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+e\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+e\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\theta+e}{1+e\cos\theta}.$$

По подстановленіи этого выраженія для $\cos f$ въ первое изъ уравненій (26), мы получимъ:

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(27)$$

или

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(28)$$

гдѣ

$$p=a\left(1-e^2\right)\text{ и }e<1.$$

Извѣстно, что уравненіе (27), если $e<1$, представляетъ эллипсъ, отнесенный къ полярнымъ координатамъ, полюсъ которыхъ находится въ фокусѣ эллипса, а полярная ось направлена по большой полуоси (черт. 24) (отъ центра эллипса). Величина e есть эксцентриситетъ эллипса; онъ равенъ $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$, такъ что ae есть половина разстоянія между фокусами; $p=a(1-e^2)$ есть полупараметръ эллипса, онъ представляется длиною радіуса вектора перпендикулярнаго къ полярной оси; кратчайшій радіусъ векторъ соотвѣтствуетъ аргументу $\theta=o$ и равенъ $a\ (1-e)$ или $a-ae$; длиннѣйшій радіусъ векторъ соотвѣтствуетъ аргументу $\theta=\pi$ и равенъ $a\ (1+e)$ или $a+ae$.

Б. Составимъ выраженія проэкцій скорости на координатныя оси α и β.

Взявъ производную отъ перваго изъ (26) получимъ:

$$\rho'=ae\sin f\cdot\frac{df}{dt}.$$

Уравненіе (26 bis) даетъ:

$$\frac{df}{dt}=\frac{n}{1-e\cos f};\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(29)$$

поэтому:

$$\rho'=\frac{nae\sin f}{1-e\cos f}.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(30)$$

1-15.

Чтобы получить θ' мы возьмемъ производную по t отъ равенства:

$$\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\log\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}+\log \operatorname{tg}\frac{f}{2};$$

получимъ:

$$\frac{\theta'}{\sin\theta}=\frac{\left(\frac{df}{dt}\right)}{\sin f},$$

или

$$\theta'=\frac{n\sin\theta}{\sin f(1-e\cos f)},$$

теперь надо выразить $\sin\theta$ въ функціи отъ f.

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}};$$

подставивъ сюда вмѣсто $tg\,\frac{\theta}{2}$ равное ему

$$\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\operatorname{tg}\frac{f}{2},$$

мы получимъ:

$$\sin\theta=\frac{\sin f}{1-e\cos f}\sqrt{1-e^2}, \qquad \text{(31)}$$

поэтому:

$$\theta'=\frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos f)^2};$$

откуда:

$$\rho\theta'=\frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos f} \qquad \text{(32)}$$

Кромѣ того между прочимъ можемъ замѣтить, что:

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}. \qquad \text{(33)}$$

Значеніе этой формулы будетъ объяснено ниже.

B. Для составленія уравненія годографа надо имѣть въ виду, что уголъ, составляемый направленіемъ скорости v съ осью a, равенъ $(\vartheta-\theta)$ (черт. 23), поэтому

I-15.

второе изъ уравненій (26) даетъ:

$$\operatorname{tg}^2\frac{f}{2}=\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2};$$

поэтому:

$$\cos f=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+e\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+e\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\theta+e}{1+e\cos\theta}.$$

По подстановленіи этого выраженія для $\cos f$ въ первое изъ уравненій (26), мы получимъ:

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(27)$$

или

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(28)$$

гдѣ

$$p=a\left(1-e^2\right)\text{ и }e<1.$$

Извѣстно, что уравненіе (27), если $e<1$, представляетъ эллипсъ, отнесенный къ полярнымъ координатамъ, полюсъ которыхъ находится въ фокусѣ эллипса, а полярная ось направлена по большой полуоси (черт. 24) (отъ центра эллипса). Величина e есть эксцентриситетъ эллипса; онъ равенъ $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$, такъ что ae есть половина разстоянія между фокусами; $p=a(1-e^2)$ есть полупараметръ эллипса, онъ представляется длиною радіуса вектора перпендикулярнаго къ полярной оси; кратчайшій радіусъ векторъ соотвѣтствуетъ аргументу $\theta=o$ и равенъ $a\ (1-e)$ или $a-ae$; длиннѣйшій радіусъ векторъ соотвѣтствуетъ аргументу $\theta=\pi$ и равенъ $a\ (1+e)$ или $a+ae$.

Б. Составимъ выраженія проэкцій скорости на координатныя оси α и β.

Взявъ производную отъ перваго изъ (26) получимъ:

$$\rho'=ae\sin f\cdot\frac{df}{dt}.$$

Уравненіе (26 bis) даетъ:

$$\frac{df}{dt}=\frac{n}{1-e\cos f};\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(29)$$

поэтому:

$$\rho'=\frac{nae\sin f}{1-e\cos f}.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(30)$$

1-15.

Чтобы получить θ' мы возьмемъ производную по t отъ равенства:

$$\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\log\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}+\log\operatorname{tg}\frac{f}{2};$$

получимъ:

$$\frac{\theta'}{\sin\theta}=\frac{\left(\frac{df}{dt}\right)}{\sin f},$$

или

$$\theta'=\frac{n\sin\theta}{\sin f\,(1-e\cos f)},$$

теперь надо выразить $\sin\theta$ въ функціи отъ f.

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}};$$

подставивъ сюда вмѣсто $tg\,\frac{\theta}{2}$ равное ему

$$\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\operatorname{tg}\frac{f}{2},$$

мы получимъ:

$$\sin\theta=\frac{\sin f}{1-e\cos f}\sqrt{1-e^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

поэтому:

$$\theta'=\frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos f)^2};$$

откуда:

$$\rho\theta'=\frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Кромѣ того между прочимъ можемъ замѣтить, что:

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Значеніе этой формулы будетъ объяснено ниже.

B. Для составленія уравненія годографа надо имѣть въ виду, что уголъ, составляемый направленіемъ скорости v съ осью α, равенъ $(\vartheta-\theta)$ (черт. 23), поэтому

I-15.

$$\rho' = v \cos (v\alpha) = u \cos (\vartheta - \theta)$$

$$\rho\theta' = v \cos (v\beta) = u \sin (\vartheta - \theta),$$

или

$$\left.\begin{aligned} u \cos\vartheta \cos\theta + u \sin\vartheta \sin\theta &= \rho' \\ u \sin\vartheta \cos\theta - u \cos\vartheta \sin\theta &= \rho\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Въ этихъ уравненіяхъ:

ρ' и $\rho\theta'$ выражаются формулами (30) и (32) какъ функціи отъ f, $\sin\theta$ выражается формулою (31) какъ функція отъ f; можно выразить также и $\cos\theta$ какъ функцію отъ f, именно:

$$\cos\theta = \frac{\cos f - e}{1 - e\cos f}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Такимъ образомъ два уравненія (34) можно привести къ такому виду что они будутъ заключать u, ϑ, f и постоянныя величины; исключивъ изъ нихъ f, мы получимъ уравненіе годографа въ полярныхъ координатахъ u, ϑ.

Можно также поступить иначе, а именно, оставивъ $\sin\theta$ и $\cos\theta$ въ лѣвыхъ частяхъ равенствъ (34), выразить ρ' и $\rho\theta'$ въ функціи θ, пользуясь выраженіями 30, 32, 31, 35 и затѣмъ исключить θ изъ обоихъ равенствъ; такъ мы и сдѣлаемъ.

Изъ (30) и (31) слѣдуетъ:

$$\rho' = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Изъ (35) мы выводимъ:

$$\frac{1-e^2}{1-e\cos f} = 1 + e\cos\theta$$

поэтому:

$$\rho\theta' = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1 + e\cos\theta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

При помощи выраженій (36) и (37) можно уравненія (34) представить подъ такимъ видомъ:

$$u \cos\vartheta \cos\theta + \left(u \sin\vartheta - \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\right) \sin\theta = 0$$

$$-u \cos\vartheta \sin\theta + \left(u \sin\vartheta - \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\right) \cos\theta = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}.$$

I-15.

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части этихъ равенствъ и сложивъ ихъ, мы получимъ:

$$u^2\cos^2\vartheta+\left(u\sin\vartheta-\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2=\frac{n^2a^2}{1-e^2}\;\ldots\;\ldots\;(38)$$

или

$$u^2-2\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}u\sin\vartheta+\frac{n^2a^2e^2}{1-e^2}=\frac{n^2a^2}{1-e^2};\;\ldots\;(39)$$

входящія въ равенство (38) величины:

$$u\cos\vartheta=x'$$

$$u\sin\vartheta=y'$$

суть прямоугольныя координаты точекъ годографа; уравненіе (38):

$$x'^2+\left(y'-\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2=\left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2.\;\ldots\;(38\text{ bis})$$

представляетъ кругъ, радіусъ котораго равенъ $\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$, а центръ находится на положительной оси $У$ въ разстояніи $\overline{oc}=\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}$ отъ начала координатъ; тотъ же кругъ въ полярныхъ координатахъ представленъ уравненіемъ (39); такъ какъ $e<1$, то OC менѣе радіуса круга (черт. 25).

Изъ равенства 33 видно, что если n есть величина положительная, то $\frac{d\theta}{dt}$ болѣе нуля, то есть θ съ теченіемъ времени возрастаетъ, значитъ движеніе по траэкторіи совершается въ сторону означенную оперенною стрѣлкою.

Зная направленіе движенія, мы по виду годографа можемъ заключить что движущаяся точка имѣетъ наибольшую скорость въ точкѣ P, скорость эта $=\overline{OQ}=\frac{an(1+e)}{\sqrt{1-e^2}}$; наименьшая скорость въ точкѣ A равна $=\overline{Oq}=\frac{an(1-e)}{\sqrt{1-e^2}}$.

Г. Можно доказать, что если точка движется по одной изъ кривыхъ 2-го порядка такимъ образомъ, что произведеніе $\rho^2\,\theta'$ остается во все время движенія постояннымъ (ρ и θ полярныя координаты, полюсъ въ фокусѣ), то *годографъ* есть кругъ; но прежде разсмотримъ значеніе произведенія $\rho^2\theta'$.

I-15.

Произведеніе:

$$\rho^2\theta' = \rho \,.\, \rho\theta' = \rho \,.\, v \sin(v\alpha) = \frac{\rho \,.\, \delta s \sin(\delta s, \alpha)}{dt};$$

числитель, т. е. $\rho\delta s \sin(\delta s,\alpha)$ представляетъ удвоенную величину площади сектора OMM_1 (черт. 26) описаннаго радіусомъ OM въ теченіи безконечно малаго времени dt; по безконечной малости элемента δs траэкторіи, площадь этого сектора безконечно мало разнится отъ площади треугольника, двѣ стороны котораго суть: $OM = \rho$ и $MM_1 = \delta s$, а уголъ между ними есть уголъ $M_1\, MO = [\pi - (\delta s,\alpha)]$; такимъ образомъ произведеніе $\rho^2\theta'$ представляетъ отношеніе между удвоенною площадью сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ въ теченіи времени dt, и величиною элемента времени dt; такое отношеніе называется *секторьяльною скоростью.*

Если секторьяльная скорость (означимъ ее черезъ 2Δ) извѣстна какъ функція времени t для всего движенія, то мы можемъ опредѣлить интегрированіемъ величину площади Q, описанной радіусомъ векторомъ отъ начала движенія до какого либо момента t; Q есть площадь сектора, заключающагося между радіусомъ векторомъ OM_0 (черт. 27) движущейся точки въ начальный моментъ времени, между радіусомъ векторомъ OM въ моментъ t и между дугою траэкторіи $M_0\, M$ пройденною точкою отъ начальнаго мемента до момента t; площадь: $\rho\delta s \sin(\delta s,\alpha)$ можно разсматривать какъ удвоенное приращеніе dQ, которое получаетъ Q въ теченіе элемента времени dt, поэтому секторьяльная скорость Δ можетъ быть выражена такимъ образомъ:

$$2\Delta = \frac{2dQ}{dt}$$

Отсюда получимъ интегрированіемъ въ предѣлахъ отъ $t = 0$ до t:

$$Q = \int \Delta dt,$$

если Δ дана какъ функція времени.

Если секторьяльная скорость постоянна: $\Delta = c$, то:

$$Q = ct, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

то есть *площадь сектора описываемаго радіусомъ векторомъ возрастаетъ равномѣрно.*

Въ движенін по эллипсу разсмотрѣнномъ выше, $2c = na \cdot a\sqrt{1-e^2}$ но $e^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}$, откуда $a^2(1-e^2) = b^2$, поэтому $2c = nab$ . . . .

Означимъ через T время, въ теченіи которого движущаяся точка совершитъ полный оборотъ по эллипсу; при этомъ радіусъ векторъ опишетъ полную площадь эллипса: πab; равенство (40) тогда обратится въ слѣдующее:

$$\pi ab = \frac{nab \cdot T}{2}$$

откуда

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

Итакъ для *эллипса* равенство 33 можно представить такъ:

$$\rho^2\theta' = \frac{2\pi ab}{T}. \quad = nab$$

Теперь опредѣлимъ годографъ для точки движущейся по какому либо коническому сѣченію:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad . . . . \quad (28)$$

при условіи, чтобы при движеніи секторьяльная скорость оставалась постоянною:

$$\rho^2\theta' = 2c \quad . . . . \quad (41)$$

Уравненіе (28) представляетъ эллипсъ при $e < 1$, гиперболу — при $e > 1$ и параболу при $e = 1$.

Прямолинейныя координаты x и y движущейся точки выражаются слѣдующимъ образомъ въ полярныхъ координатахъ:

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta;$$

поэтому:

$$x = \frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}; \quad y = \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

Прямолинейныя координаты годографа суть:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt};$$

I-15.

то есть:

$$x' = -\frac{\sin \theta}{p} \rho^2 \frac{d\theta}{dt};$$

$$y' = \frac{\cos \theta + e}{p} \rho^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

На основанiи же равенства (41):

$$x' = -\frac{2c}{p} \sin \theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

$$y' = \frac{2c}{p} (\cos \theta + e) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

исключивъ отсюда θ мы найдемъ уравненiе годографа:

$$x'^2 + \left(y' - \frac{2c}{p} e\right)^2 = \left(\frac{2c}{p}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

1. Для эллипса это есть ни что иное какъ уравненiе (38 bis); мы уже разсмотрѣли видъ и положенiе круга въ этомъ случаѣ ($e<1$); посмотримъ какъ расположенъ годографъ движенiя по гиперболѣ или параболѣ.

2. При $e=1$ уравненiе (28) представляетъ параболу (черт. 28) расположенную такъ, что полярная ось проходитъ черезъ вершину кривой, а фокусъ совпадаетъ съ полюсомъ; уравненiе (44) при $e=1$ представляетъ кругъ, *касающiйся* полярной оси въ полюсѣ; центръ его на оси Y; движенiе имѣетъ наибольшую скорость $OQ = \frac{4c}{p}$ въ вершинѣ P.

3. При $e>1$ уравненiе (28) представляетъ гиперболу (черт. 29), расположенную такимъ образомъ, что въ полюсѣ находится одинъ изъ фокусовъ кривой, а полярная ось проходитъ черезъ вершины обѣихъ вѣтвей кривой. Уравненiе (44) представляетъ при этомъ кругъ *непересѣкающiй* полярной оси, такъ какъ $OC = \frac{2ce}{p}$ болѣе радiуса круга: $\frac{2c}{p}$, наибольшая скорость $\overline{OQ} = \frac{2c}{p}(e+1)$ въ вершинѣ P, наименьшая: $\overline{Oq} = \frac{2c}{p}(e-1)$ въ вершинѣ A; обѣ скорости имѣютъ направленiя положительной оси Y.

Радiусъ векторъ $\overline{OS}$, касательный къ годографу, представляетъ скорость точки находящейся на безконечно большомъ разстоянiи отъ O, т. е. на ассимптотѣ, а потому $\overline{OS}$ долженъ быть параллельнымъ къ ассимптотѣ.

Задачи.

Координаты движущейся точки выражены функціями времени; опредѣлить видъ и положеніе траэкторіи, выразить величину скорости и направленіе движенія въ функціяхъ времени и составить уравненія годографа скорости.

1.

$$x = a + \alpha f(t)$$
$$y = b + \beta f(t)$$
$$z = c + \gamma f(t)$$

2.

$$x = a \cos \omega t$$
$$y = b \sin \omega t$$

Траэкторія:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Величина и направленіе скорости:

$$v = \omega \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 \omega t}; \quad \operatorname{tg}(v, X) = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} \omega t.$$

Уравненіе годографа:

$$\frac{x'^2}{\omega^2 a^2} + \frac{y'^2}{\omega^2 b^2} = 1.$$

3.

$$x = ae^{kt}; \quad y = be^{-kt}.$$

Траэкторія:

$$xy = ab.$$

Величина и направленіе скорости:

$$v = k\sqrt{a^2 e^{2kt} + b^2 e^{-2kt}} = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}(v, X) = -\frac{b}{a} e^{-2kt}.$$

Уравненіе годографа:

$$x'y' = -k^2 ab$$

I- Задачи.

4. $$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt});\quad y = \frac{b}{2}(e^{kt} - e^{-kt}).$$

Траэкторія:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Величина и направленіе скорости: $x' = \frac{ak}{2}(e^{kt} - e^{-kt});\ y' = \frac{bk}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = v = k\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2};\quad \operatorname{tg}(v,X) = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Уравненіе годографа:

$$\frac{y'^2}{b^2k^2} - \frac{x'^2}{a^2k^2} = 1.$$

5. $$x = a\cos\varepsilon t + \alpha\sin\varepsilon t;\quad y = b\cos\varepsilon t + \beta\sin\varepsilon t.$$

Траэкторія:

$$x^2(b^2 + \beta^2) - 2xy(ab + \alpha\beta) + y^2(a^2 + \alpha^2) = (a\beta - b\alpha)^2.$$

Уравненіе годографа отличается только множителемъ ε^2 во второй части; показать что эти кривыя — эллипсы.

6. $$x = at^3;\quad y = b^2t^2.$$

Траэкторія — полукубическая парабола:

$$x = \frac{a}{b^3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Уравненіе годографа:

$$y'^2 = \frac{4b^4}{3a}x'$$

7. $$y = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}).$$

$$z = \frac{1}{k}\left(b + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t.$$

Траэкторія (см. черт. 30):

$$z = \frac{g + kb}{ak}y - \frac{g}{k^2}\log\left(\frac{a}{a - ky}\right).$$

Величина и направленіе скорости: $y' = ae^{-kt};\ z' = \frac{g+kb}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}$

$$v^2 = \frac{g^2}{k^2} - 2\frac{g}{k}\left(b + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} + \left(a^2 + \left(b + \frac{g}{k}\right)^2\right)e^{-2kt}$$

$$v\cos(v,Y) = ae^{-kt}$$

$$v\cos(v,Z) = \left(b + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$\frac{z'}{y'} = \operatorname{tg}(v,Y) = \frac{bk + g(1 - e^{kt})}{ka} = \frac{ab - (g + kb)\,y}{a\,(a - ky)}.$$

а) Кривая имѣетъ ассимптоту параллельную отрицательной оси Z и отстоящую отъ начала координатъ на разстояніи $\frac{a}{k}$ по положительной оси Y.

б) Скорость горизонтальна въ моментъ:

$$t_1 = \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{bk}{g}\right),$$

тогда движущаяся точка находится въ наивысшей точкѣ H кривой: координаты точки H:

$$y_1 = \frac{ab}{g + kb}$$

$$z_1 = \frac{b}{k} - \frac{g}{k^2}\log\left(1 + \frac{kb}{g}\right).$$

в) Движущаяся точка имѣетъ наименьшую скорость въ моментъ t_2:

$$t_2 = \frac{1}{k}\log\frac{k^2a^2 + (bk + g)^2}{g(bk + g)};$$

этотъ моментъ позднѣе момента t_1.

При $t = t_2$

$$\frac{d^2v^2}{dt^2} > 0.$$

При $t = \infty$

$$v = \frac{g}{k}.$$

Годографъ:

$$z' = \left(b + \frac{g}{k}\right)\frac{y'}{a} - \frac{g}{k}$$

4

(см. черт. 30)

8.
$$\rho = a\sqrt{\frac{e^{ct}+e^{-ct}}{2}}$$
$$\theta = \frac{1}{2}\,arc\sin\left(\frac{e^{ct}-e^{-ct}}{e^{ct}+e^{-ct}}\right).$$

Траэкторія:
$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}.$$

Величина скорости и углы, составляемые ею съ координатными осями α и β:
$$v = \frac{ac}{2\sqrt{2}}\sqrt{e^{ct}+e^{-ct}}$$
$$\cos(v\alpha) = \sin 2\,\theta;\quad \cos(v\beta) = \cos 2\,\theta.$$

Уголъ, составляемый скоростью съ полярною осью:
$$\text{или}\ \vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Уравненіе годографа:
$$u^2 = -\frac{a^2c^2}{4\cos 2\vartheta}.$$

9.
$$\rho = b(1 - at\cos\alpha);\quad \theta = \frac{at\sin\alpha}{1 - at\cos\alpha}.$$

Уравненіе траэкторіи:
$$\rho\theta_1 = b\,\mathrm{tg}\,\alpha\quad \text{гдѣ}\ \theta_1 = \theta + \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Проэкціи скорости на координатныхъ осяхъ:
$$v\cos(v,\alpha) = -ab\cos\alpha;\quad v\cos(v,\beta) = \frac{ab^2\sin\alpha}{\rho}$$

Уравненіе годографа:
$$\vartheta = \pi - \mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\sqrt{u^2 - a^2b^2\cos^2\alpha}}{ab\cos\alpha} - arc\cos\left(\frac{ab\cos\alpha}{u}\right)$$

это — развертка круга радіуса: $ab\cos\alpha$.

10. $\rho = at; \; \theta = \varepsilon t.$

Уравненіе годографа:

$$\theta = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a} + arc\cos\frac{a}{u}.$$

11. **Дана циклоида:**

$$x = R(\omega + \sin\omega)$$

$$y = R(1 + \cos\omega)$$

основаніе которой расположено по оси X, а вершина находится по оси Y (см. черт. 31); ω — есть уголъ, на который поворачивается, при катаніи круга по оси $\overline{X}OX$, тотъ діаметръ O_1CM, на концѣ котораго находится точка вычерчивающая циклоиду; уголъ ω имѣетъ отрицательныя значенія для части $S_0\overline{X}$ кривой. Разстоянія s по циклоидѣ считаются отъ точки S_0, положительными въ сторону означенную стрѣлкою, т. е. въ сторону отъ S_0 къ X и отрицательными — въ сторону отъ S_0 къ $\overline{X}$.

По данной циклоидѣ движется точка M по слѣдующему закону:

$$s = s_0 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{4R}}\right).$$

Величина скорости:

$$v = +\sqrt{\frac{s_0^2 g}{4R}\cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{4R}}\right)};$$

откуда:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{s_0^2 - s^2}{8R}.$$

По свойству циклоиды, длина дуги s выражается слѣдующимъ образомъ въ координатѣ y:

$$\frac{s^2}{8R} = 2R - y,$$

а такъ какъ

$$y = 2R\cos^2\frac{\omega}{2},$$

то также:

$$s = 4R\sin\frac{\omega}{2};$$

поэтому:

$$\frac{v^2}{2g} = 2R\left(\sin^2\frac{\omega_0}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2}\right) = R(\cos\omega - \cos\omega_0),$$

гдѣ ω_0 есть уголъ, соотвѣтствующій длинѣ дуги s_0.

По свойству циклоиды касательная въ какой либо точкѣ ея (M) проходитъ черезъ наинизшую точку T (см. черт. 31) катящагося круга, такъ что касательная наклонена къ основанію циклоиды подъ угломъ $\frac{\omega}{2}$; поэтому уголъ ϑ, составляемый направленіемъ скорости съ осью X, равенъ, или $\left(-\frac{\omega}{2}\right)$, или $\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right)$, смотря по направленію движенія (см. черт. 31); во всякомъ же случаѣ:

$$\cos 2\vartheta = \cos\omega.$$

Слѣдовательно уравненіе годографа скорости будетъ (въ полярныхъ координатахъ):

$$u^2 = 2gR(\cos 2\vartheta - \cos\omega_0).$$

Если:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2},$$

то уравненіе:

$$u^2 = 2gR\cos 2\vartheta$$

представляетъ лемнискату, главная полуось которой равна $\sqrt{2gR}$.

ГЛАВА II.

Абсолютное движеніе и скорости точекъ твердаго тѣла.

Величины, опредѣляющія положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ.

§ 16. Неизмѣняемая система точекъ или твердое тѣло есть такое, всѣ точки котораго сохраняютъ неизмѣнныя разстоянія между собою.

Мы проведемъ въ тѣлѣ три взаимно перпендикулярныя плоскости и примемъ ихъ за плоскости $YЮZ$, $ZЮ\Xi$, $\Xi ЮY$, линіи пере-

II-16.

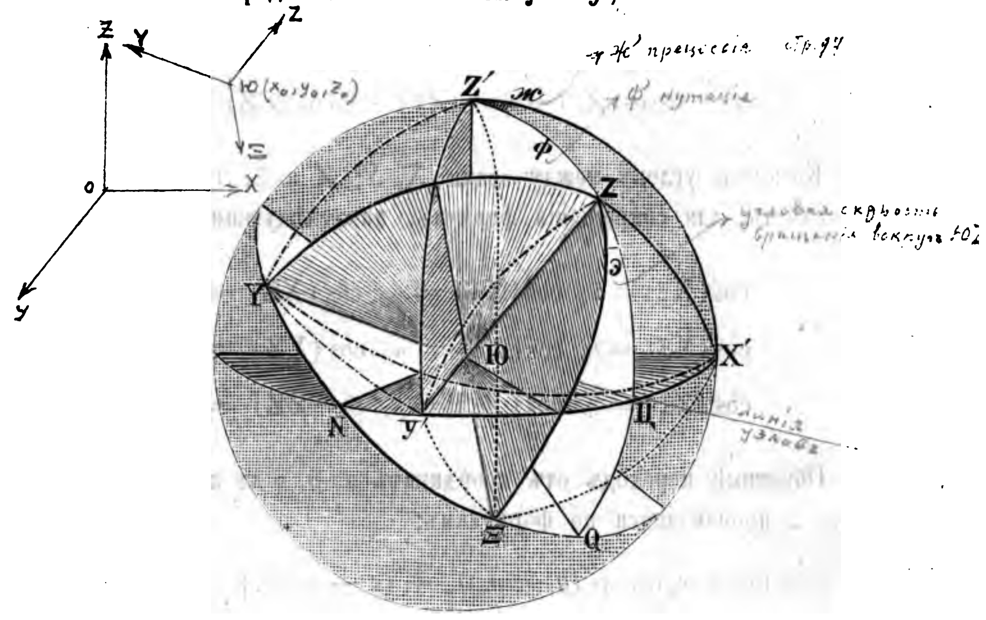
сѣченія ихъ за оси, а точку пересѣченія осей—за начало *Ю* прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ, помощью которыхъ будемъ выражать положеніе точекъ въ тѣлѣ или относительно тѣла; эти координаты будемъ обозначать буквами греческаго алфавита: ξ, η, ζ, въ отличіе отъ координатъ абсолютныхъ: x, y, z, выражающихъ положеніе точекъ въ пространствѣ.

Координаты ξ, η, ζ, всякой точки твердаго тѣла неизмѣнны; точка же, посторонняя твердому тѣлу, можетъ имѣть координаты, измѣняющіяся съ теченіемъ времени.

Мы будемъ называть координаты ξ, η, ζ, — *относительными координатами.*

Положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ опредѣляется шестью величинами, а именно:

Положеніе точки *Ю* опредѣляется координатами ея $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ относительно плоскостей координатъ *YOZ*, *ZOX*, *XOY*; направленіе оси *ЮZ* опредѣляется величиною угла ϕ, составляемаго ею съ



Примѣчаніе къ чертежу: оси ЮX', ЮY', ЮZ' параллельны осямъ координатъ OX, OY, OZ; линія ЮN перпендикулярна къ плоскости Z'ZЦQ.

II-15.17.

осью OZ, и величиною угла *ж*, составляемаго плоскостью проведенною черезъ $Ю\mathbf{Z}$ и черезъ линію $ЮZ'$, параллельную оси OZ, съ плоскостью ZOX; положеніе плоскости $\mathbf{Z}Ю\Xi$ опредѣляется величиною угла *э* дополняющаго уголъ $Z'\mathbf{Z}\Xi$ до двухъ прямыхъ; уголъ *э* есть двугранный уголъ между плоскостями $\mathbf{Z}ЮЦ$ и $\mathbf{Z}Ю\Xi$.

Такимъ образомъ:

Эйлеровы углы ф, ж, э.

$$x_ю,\ y_ю,\ z_ю,\ ф,\ ж,\ э$$

суть шесть величинъ, вполнѣ опредѣляющихъ положеніе тѣла въ пространствѣ.

Формулы преобразованія координатъ:

§ 17. Переходъ отъ относительныхъ координатъ ξ, η, ζ какой либо точки къ абсолютнымъ x, y, z производится по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_ю + \xi\cos(X\Xi) + \eta\cos(X\Upsilon) + \zeta\cos(X\mathbf{Z}) \\ y &= y_ю + \xi\cos(У\Xi) + \eta\cos(У\Upsilon) + \zeta\cos(У\mathbf{Z}) \\ z &= z_ю + \xi\cos(Z\Xi) + \eta\cos(Z\Upsilon) + \zeta\cos(Z\mathbf{Z}) \end{aligned}\right\}\ \ldots \quad (45)$$

Косинусы угловъ между осями X, $У$, Z и Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ я буду обозначать, для сокращенія формулъ, нижеслѣдующими буквами:

$$\begin{aligned} \cos(X\Xi) &= \lambda_x & \cos(X\Upsilon) &= \mu_x & \cos(X\mathbf{Z}) &= \nu_x \\ \cos(У\Xi) &= \lambda_y & \cos(У\Upsilon) &= \mu_y & \cos(У\mathbf{Z}) &= \nu_y \\ \cos(Z\Xi) &= \lambda_z & \cos(Z\Upsilon) &= \mu_z & \cos(Z\mathbf{Z}) &= \nu_z \end{aligned} \quad (45^a)$$

Обратный переходъ отъ координатъ x, y, z къ координатамъ ξ, η, ζ производится по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_ю)\lambda_x + (y - y_ю)\lambda_y + (z - z_ю)\lambda_z \\ \eta &= (x - x_ю)\mu_x + (y - y_ю)\mu_y + (z - z_ю)\mu_z \\ \zeta &= (x - x_ю)\nu_x + (y - y_ю)\nu_y + (z - z_ю)\nu_z \end{aligned}\right\}\ \ldots \quad (46)$$

$x = x_ю + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x$
$y = y_ю + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y$
$z = z_ю + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z$

Б. Косинусы угловъ между осями X, Y, Z и осями Ξ, Υ, **Z** выражаются въ тригонометрическихъ функціяхъ угловъ *ф*, *ж*, *э* слѣдующимъ образомъ:

Преобразуемъ координаты въ плоскости $X'Y'$, взявъ за новыя направленія Ц и N:

$$x - x_{ю} = ц \cos ж - n \sin ж.$$
$$y - y_{ю} = ц \sin ж + n \cos ж.$$

Преобразуемъ координаты въ плоскости $Z'Ц$, взявъ за новыя направленія Z и Q

$$n = n$$
$$z - z_{ю} = \zeta \cos ф - q \sin ф$$
$$ц = \zeta \sin ф + q \cos ф;$$

поэтому

$$x - x_{ю} = q \cos ж \cos ф - n \sin ж + \zeta \sin ф \cos ж$$
$$y - y_{ю} = q \sin ж \cos ф + n \cos ж + \zeta \sin ф \sin ж$$
$$z - z_{ю} = -q \sin ф + \zeta \cos ф$$

7. Преобразуемъ координаты въ плоскости QN, взявъ за новыя направленія Ξ и Υ

$$\zeta = \zeta$$
$$q = \xi \cos э - \eta \sin э$$
$$n = \xi \sin э + \eta \cos э.$$

поэтому

$$x - x_{ю} = \xi \cdot \lambda_x + \eta \mu_x + \zeta \nu_x$$
$$y - y_{ю} = \xi \cdot \lambda_y + \eta \mu_y + \zeta \cdot \nu_y$$
$$z - z_{ю} = \xi \cdot \lambda_z + \eta \mu_z + \zeta \cdot \nu_z$$

гдѣ $\lambda_x = \ldots;\ \lambda_y = \ldots;\ \lambda_z = \ldots;$
$\mu_x = \ldots;\ \mu_y = \ldots;\ \mu_z$
$\nu_x = \ldots;\ \nu_y = \ldots;\ \nu$ } 47–55.

ж; . . . . (53)

изъ сферическаго тр :

. . . . (54)

II-16.17.

осью OZ, и величиною угла *ж*, составляемаго плоскостью проведенною черезъ $Ю\mathbf{Z}$ и черезъ линію $ЮZ'$, параллельную оси OZ, съ плоскостью ZOX; положеніе плоскости $\mathbf{Z}Ю\Xi$ опредѣляется величиною угла *э* дополняющаго уголъ $Z'\mathbf{Z}\Xi$ до двухъ пря-
мь
и

су
пр

ли
фс

об

Ξ λ_x
Y μ_x
Z ν_x

$$\left.\begin{aligned} &\ldots x_ю)\lambda_x + (y - y_ю)\lambda_y + (z - z_ю)\lambda_z \\ &\ldots x_ю)\mu_x + (y - y_ю)\mu_y + (z - z_ю)\mu_z \\ &\ldots x_ю)\nu_x + (y - y_ю)\nu_y + (z - z_ю)\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \xi\cdot\lambda_x + \eta\cdot\mu_x + \zeta\cdot\nu_x \\ &+ \xi\cdot\lambda_y + \eta\cdot\mu_y + \zeta\cdot\nu_y \\ &+ \xi\cdot\lambda_z + \eta\cdot\mu_z + \zeta\cdot\nu_z \end{aligned}\right\} \quad (45\ bis)$$

Б. Косинусы угловъ между осями X, $У$, Z и осями Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ выражаются въ тригонометрическихъ функціяхъ угловъ $ф$, $ж$, $э$ слѣдующимъ образомъ:

Изъ сферическаго треугольника $\Xi N X'$, въ которомъ $N\Xi = \frac{\pi}{2} - э$; $NX' = \frac{\pi}{2} + ИX' = \frac{\pi}{2} + ж$, уголъ $\Xi N X' = ф$, найдемъ:

$$\lambda_x = - \sin э \sin ж + \cos э \cos ж \cos ф; \quad . \; . \; . \quad (47)$$

изъ сферическаго треугольника $\Xi N У'$, въ которомъ $NУ' = ж$:

$$\lambda_y = \sin э \cos ж + \cos э \sin ж \cos ф; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

изъ сферическаго треугольника $\Xi \mathbf{Z} Z'$, въ которомъ $\Xi \mathbf{Z} = \frac{\pi}{2}$, уголъ $\Xi \mathbf{Z} Z' = \pi - э$:

$$\lambda_z = - \sin ф \cos э; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

изъ сферическаго треугольника $\Upsilon N X'$, въ которомъ $\Upsilon N = \Xi Q = э$, уголъ $\Upsilon N X' = \pi - ф$:

$$\mu_x = - \cos э \sin ж - \sin э \cos ж \cos ф; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

изъ сферическаго треугольника $\Upsilon N У'$:

$$\mu_y = \cos э \cos ж - \sin э \sin ж \cos ф; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

изъ сферическаго треугольника $\Upsilon \mathbf{Z} Z'$, въ которомъ $\Upsilon \mathbf{Z} = \frac{\pi}{2}$, уголъ $\Upsilon \mathbf{Z} Z' = \frac{\pi}{2} - э$:

$$\mu_z = \sin ф \sin э; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

изъ сферическаго треугольника $\mathbf{Z} Z' X'$:

$$\nu_x = \sin ф \cos ж; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

изъ сферическаго треугольника $\mathbf{Z} Z' У'$:

$$\nu_y = \sin ф \sin ж; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

II-17.

и наконецъ:

$$\nu_z = \cos \phi \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

B. Вслѣдствіе перпендикулярности между собою осей X, Y, Z и вслѣдствіе перпендикулярности между собою осей Ξ, Υ, **Z**, вышеозначенные косинусы связаны между собою шестью равенствами:

$$\lambda^2_x + \lambda^2_y + \lambda^2_z = 1 \ldots\ldots \quad (56,a)$$

$$\mu^2_x + \mu^2_y + \mu^2_z = 1 \ldots\ldots \quad (56,b)$$

$$\nu^2_x + \nu^2_y + \nu^2_z = 1 \ldots\ldots \quad (56,c)$$

$$\mu_x\nu_x + \mu_y\nu_y + \mu_z\nu_z = 0 \ldots\ldots \quad (57,a)$$

$$\nu_x\lambda_x + \nu_y\lambda_y + \nu_z\lambda_z = 0 \ldots\ldots \quad (57,b)$$

$$\lambda_x\mu_x + \lambda_y\mu_y + \lambda_z\mu_z = 0 \ldots\ldots \quad (57,c)$$

Эти шесть равенствъ даютъ возможность выразить каждый изъ девяти косинусовъ, входящихъ въ нихъ, четырьмя изъ числа восьми остальныхъ.

Мы составимъ выраженія такого рода для λ_x, λ_y, λ_z; для этого надо рѣшить относительно этихъ величинъ уравненія (57,*b*) (57,*c*), заключающія ихъ въ первой степени; мы найдемъ:

$$\frac{\lambda_x}{\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y} = \frac{\lambda_y}{\mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z} = \frac{\lambda_z}{\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x} = \frac{\sqrt{\lambda^2_x + \lambda^2_y + \lambda^2_z}}{D} \ldots \quad (58)$$

гдѣ:

$$D = \sqrt{(\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y)^2 + (\mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z)^2 + (\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x)^2}.$$

Въ томъ частномъ, которое имѣетъ знаменателемъ D, числитель, на основаніи равенства (56,*a*), равенъ ± 1; можно доказать, что и D равно $+1$ или (-1), т. е. $D^2 = 1$.

Вообще сумма трехъ квадратовъ:

$$(Bc - Cb)^2 + (Ca - Ac)^2 + (Ab - Ba)^2$$

11-17.

составленная изъ какихъ либо шести величинъ:

$$A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c,$$

можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ:

$$\left[\begin{array}{l} \qquad\qquad A^2b^2 + A^2c^2 - 2AaBb \\ + B^2a^2 \qquad\quad + B^2c^2 - 2BbCc \\ + C^2a^2 + C^2b^2 \qquad\quad - 2CcAa \end{array}\right].$$

Прибавимъ къ этой суммѣ $A^2a^2 + C^2b^2 + C^2c^2$ и тоже самое вычтемъ; будетъ:

$$\left[\begin{array}{l} A^2(a^2+b^2+c^2) \\ B^2(a^2+b^2+c^2) \\ C^2(a^2+b^2+c^2) \end{array}\right] - \left[\begin{array}{l} A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 \\ \\ + 2AaBb + 2BbCc + 2CcAa \end{array}\right]$$

или:

$$(A^2 + B^2 + C^2)\ (a^2 + b^2 + c^2) - (Aa + Bb + Cc)^2.$$

Такимъ образомъ мы получили слѣдующую формулу:

$$(Bc - Cb)^2 + (Ca - Ac)^2 + (Ab - Ba)^2 =$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2)\ (a^2 + b^2 + c^2) - (Aa + Bb + Cc)^2 \ldots (59)$$

По этой формулѣ D^2 можетъ быть представлено такъ:

$$D^2 = (\mu^2_x + \mu^2_y + \mu^2_z)\ (\nu^2_x + \nu^2_y + \nu^2_z) - (\mu_x\nu_x + \mu_y\nu_y + \mu_z\nu_z)^2;$$

на основанiи же равенствъ (56,b), (56,c), (57,a) мы получимъ отсюда: $D^2 = 1$; поэтому отношенiе:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2_x + \lambda^2_y + \lambda^2_z}}{D}$$

равно $+1$ или -1.

Чтобы окончательно опредѣлить знакъ этого отношенiя,

11-17.

мы обратимся къ частному случаю, въ которомъ ось **ЮZ** параллельна оси OZ и ось $Ю\Upsilon$ параллельна оси OY; такъ какъ тогда $\mu_y = 1$, $\nu_z = 1$, $\mu_z = 0$, $\nu_y = 0$, то изъ полученныхъ выше равенствъ мы найдемъ:

$$\lambda_x = \pm 1,$$

легко видѣть, что при совпаденіи осей: **Z** съ Z' и Υ съ Y' должны совпасть также и оси Ξ и X'; поэтому должно быть $\lambda_x = +1$; значитъ послѣднее изъ отношеній (58) должно быть равно $(+1)$; поэтому равенства (58) даютъ нижеслѣдующія выраженія для косинусовъ λ_x, λ_y, λ_z; шесть прочихъ выраженій мы составимъ подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_x = \mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y \ldots (a),\ \lambda_y = \mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z \ldots (b). \\ \lambda_z = \mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x \ldots (c) \\ \mu_x = \nu_y\lambda_z - \nu_z\lambda_y \ldots (d),\ \mu_y = \nu_z\lambda_x - \nu_x\lambda_z \ldots (e), \\ \mu_z = \nu_x\lambda_y - \nu_y\lambda_x \ldots (f) \\ \nu_x = \lambda_y\mu_z - \lambda_z\mu_y \ldots (g),\ \nu_y = \lambda_z\mu_x - \lambda_x\mu_z \ldots (h), \\ \nu_y = \lambda_x\mu_y - \lambda_y\mu_x \ldots (i) \end{array}\right\} \quad (60)$$

Если помножить обѣ части равенства $(60,b)$ на λ_z, обѣ части $(60,e)$ на μ_z, обѣ части $(60,h)$ на ν_z и результаты сложить, то получимъ сумму $\lambda_y\lambda_z + \mu_y\mu_z + \nu_y\nu_z$ въ первой части и нуль во второй; такимъ образомъ можно получить три нижеслѣдующія равенства: (62, *a*, *b*, *c*).

Изъ выраженій (60), пользуясь формулою (59) и полученными равенствами (62), можно вывести равенства (61, *a*, *b*, *c*).

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^2_x + \mu^2_x + \nu^2_x = 1 \ldots (a),\ \lambda^2_y + \mu^2_y + \nu^2_y = 1 \ldots (b). \\ \lambda^2_z + \mu^2_z + \nu^2_z = 1 \ldots (c) \end{array}\right\} \quad (61)$$

$$\lambda_y\lambda_z + \eta_y\mu_z + \nu_y\nu_z = 0 \ldots\ldots (62,\ a)$$

$$\lambda_z\lambda_x + \mu_z\mu_x + \nu_z\nu_x = 0 \ldots\ldots (62,\ b)$$

$$\lambda_x\lambda_y + \mu_x\mu_y + \nu_x\nu_y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (62, c)$$

Равенства (61, a, b, c) (62, a, b, c) могутъ замѣнить собою равенства (56, a, b, c) (57, a, b, c).

Формулы, выведенныя въ этомъ параграфѣ, выводятся въ Аналитической Геометріи; они приведены здѣсь для того, чтобы напомнить о нихъ и условиться относительно буквеннаго обозначенія входящихъ въ нихъ величинъ.

§ 18. Если твердое тѣло находится въ движеніи, то по крайней мѣрѣ одна изъ шести величинъ:
$x_ю, y_ю, z_ю$, *ф*, *ж*, *э*, которыми опредѣляется положеніе тѣла въ пространствѣ, измѣняется съ теченіемъ времени.

Если твердое тѣло совершаетъ движенія такого рода, что:

$$\left.\begin{array}{l} ф = \text{постоянному} \\ ж = \text{постоянному} \\ э = \text{постоянному} \\ x_ю = f_1(t);\ y_ю = f_2(t);\ z_ю = f_3(t) \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (63)$$

то траэкторіи всѣхъ точекъ тѣла суть параллельныя кривыя линіи одинаковаго вида и размѣра съ траэкторіею точки *Ю*, потому что тѣло постоянно остается параллельнымъ самому себѣ.

Такое движеніе тѣла называется *поступательнымъ движеніемъ*.

Когда мы говоримъ, что данное тѣло движется *поступательно* и задаемъ движеніе одной точки тѣла, точки *Ю* или какой либо другой, то этимъ самымъ вполнѣ опредѣляемъ движеніе всего тѣла т. е. всѣхъ точекъ его; при этомъ для движенія безразлично, будетъ ли тѣло идеально твердое или мягкое; какое бы оно ни было въ физическомъ смыслѣ, оно при поступательномъ движеніи движется какъ твердое тѣло.

Пусть $\mathfrak{M}_0\ \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots$ (черт. 32) есть извѣстная намъ траэкторія нѣкоторой точки $\mathfrak{M}$ тѣла (ею можетъ быть и точка *Ю*); $\mathfrak{M}_0$ положеніе этой точки въ пространствѣ въ моментъ t_0, $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2 \ldots$

II-18.

положенія ея въ моменты t_1, t_2 ..... Если движеніе тѣла поступательное, то мы можемъ построить траэкторію и опредѣлить движеніе всякой другой точки $\mathfrak{M}'$ тѣла; для этого надо знать положеніе ея въ одинъ изъ моментовъ времени, напримѣръ положеніе $\mathfrak{M}'_0$ въ моментъ t_0; проведя изъ $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ ...... линіи $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}'_1$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}'_2$ равныя и параллельныя $\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}'_0$ мы найдемъ положенія $\mathfrak{M}'_1\mathfrak{M}'_2$ .... точки $\mathfrak{M}'$ въ пространствѣ въ моменты t_1, t_2 .... и можемъ такимъ образомъ построить траэкторію ея, которая будетъ параллельна траэкторіи точки $\mathfrak{M}_0$, одинаковаго съ нею вида и размѣровъ.

Б. Если твердое тѣло совершаетъ движеніе такого рода:

$$\left.\begin{array}{l} x_ю = \text{пост.},\ y_ю = \text{пост.},\ z_ю = \text{пост.} \\ ф = F_1(t);\quad ж = F_2(t);\quad э = F_3(t) \end{array}\right\}, \ldots\ldots \quad (64)$$

то траэкторія каждой точки $\mathfrak{M}$ твердаго тѣла есть кривая, начерченная на сферѣ, имѣющей центръ въ $Ю$ и радіусъ равный $\mathfrak{M}Ю$, — разстоянію этой точки отъ точки $Ю$; всѣ точки находящіяся на одной линіи проходящей черезъ $Ю$, имѣютъ траэкторіи подобныя другъ другу относительно центра подобія $Ю$.

Вслѣдствіе неизмѣняемости тѣла, уголъ $\mathfrak{M}Ю\mathfrak{M}'$ между радіусами векторами двухъ точекъ тѣла сохраняетъ постоянную величину.

Такое движеніе тѣла называется *вращательнымъ движеніемъ тѣлъ вокругъ точки Ю*.

Движеніе тѣла можетъ быть *вращательнымъ вокругъ всякой точки* тѣла; абсолютныя координаты этой точки должны быть тогда постоянными, а траэкторіи всѣхъ точекъ тѣла суть кривыя, находящіяся на поверхностяхъ сферъ, имѣющихъ общимъ центромъ неподвижную точку.

В. Если неподвижный центръ, вокругъ котораго происходитъ вращеніе твердаго тѣла, находится въ безконечности, то сферы, заключающія траэкторіи точекъ твердаго тѣла, обратятся въ плоскости параллельныя другъ другу; всѣ линіи, проходящія черезъ безконечно удаленный неподвижный центръ, будутъ параллельны одна другой и

перпендикулярны къ системѣ плоскостей; точки, находящіяся на каждой такой линіи, будутъ описывать траэкторіи параллельныя другъ другу и одинаковыя, какъ по виду, такъ и по размѣрамъ; потому, разсматривая такое движеніе, совершенно достаточно разсмотрѣть движеніе точекъ тѣла, находящихся въ одной изъ плоскостей вышеупомянутой системы; всякая точка тѣла, находящаяся внѣ этой основной плоскости, будетъ совершать въ своей плоскости тоже самое движеніе, какое совершаетъ проэкція ея на основную плоскость въ послѣдней. Движеніе такого рода называется *движеніемъ тѣла параллельно плоскости* или *движеніемъ плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.*

Предположимъ, что неподвижнымъ осямъ координатъ дано такое положеніе, что плоскость XOY (черт. 33) совпадаетъ съ плоскостью неизмѣняемой фигуры; кромѣ того точку $Ю$ возьмемъ въ той же плоскости, а ось $ЮZ$ въ тѣлѣ возьмемъ параллельною оси OZ; при этихъ условіяхъ какое либо движеніе тѣла параллельно плоскости XOY выразится такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} z_ю = 0;\ x_ю = f_1(t);\ y_ю = f_2(t) \\ ф = 0;\ ж = 0;\qquad э = F(t); \end{array}\right\} \ldots\ldots (65)$$

абсолютное движеніе какой либо точки тѣла, относительныя координаты которой суть ξ, η, ζ, совершается въ плоскости

$$z = \zeta,$$

параллельной плоскости XOY, и абсолютныя координаты ея выражаются такъ:

ф. 45 bis, причемъ
$\lambda_x = \cos э;\ \lambda_y = \sin э;\ \lambda_z = 0;$
$\mu_x = -\sin э;\ \mu_y = \cos э;\ \mu_z = 0;$
$\nu_x = 0;\ \nu_y = 0;\ \nu_z = 1;$

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t) + \xi \cos F(t) - \eta \sin F(t) \\ y = f_2(t) + \xi \sin F(t) + \eta \cos F(t) \\ z = \zeta \end{array}\right\} \ldots\ldots (66)$$

$x = x_ю + \xi \cdot \cos э - \eta \cdot \sin э$
$y = y_ю + \xi \cdot \sin э + \eta \cdot \cos э$

Исключивъ изъ первыхъ двухъ равенствъ время t, мы получимъ уравненіе абсолютныхъ траэкторій точекъ неизмѣняемой фигуры.

II-18.

Примѣръ 11. Точка *Ю* описываетъ, равномѣрнымъ движеніемъ, окружность круга радіуса *R*, такъ что:

$$f_1(t) = R\cos\omega t;\quad f_2(t) = R\sin\omega t$$

и при этомъ тѣло вращается около оси *ЮZ* тоже равномѣрно и такъ, что:

$$э = F(t) = \omega t.$$

Первыя два изъ уравненій (66) будутъ:

$$(\xi + R)\cos\omega t - \eta\sin\omega t = x$$

$$\eta\cos\omega t + (\xi + R)\sin\omega t = y;$$

по возвышеніи въ квадратъ и по сложеніи этихъ равенствъ получимъ:

$$(\xi + R)^2 + \eta^2 = x^2 + y^2;$$

т. е. точка, имѣющая относительныя координаты (ξ, η), описываетъ на плоскости *XOY* окружность, имѣющую центръ въ *O* и радіусъ равный $\sqrt{(\xi + R)^2 + \eta^2}$; т. е. разстоянію ея отъ *O* въ начальномъ положеніи тѣла (при $t = 0$).

Примѣръ 12. Движеніе точки *Ю* по той же окружности совершается въ противоположномъ направленіи:

$$x_ю = R\cos\omega t;\quad y_ю = -R\sin\omega t$$

и по прежнему

$$э = \omega t$$

Уравненія (66) будутъ:

$$(\xi + R)\cos\omega t - \eta\sin\omega t = x$$

$$\eta\cos\omega t + (\xi - R)\sin\omega t = y$$

Исключеніе времени *t* изъ этихъ равенствъ можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ: рѣшить ихъ относительно $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$:

$$\cos\omega t = \frac{x(\xi - R) + \eta y}{\xi^2 + \eta^2 - R^2}$$

$$\sin\omega t = \frac{y(\xi + R) - x\eta}{\xi^2 + \eta^2 - R^2},$$

возвысить полученныя выраженія въ квадратъ и сложить; получимъ:

$$(\xi^2+\eta^2-R^2)^2=x^2\big((\xi-R)^2+\eta^2\big)-4R\eta xy+y^2\big((\xi+R)^2+\eta^2\big); \quad . \; . \quad (67)$$

такъ какъ:

$$\Big\{16R^2\eta^2-4\left[(\xi-R)^2+\eta^2\right]\left[(\xi+R)^2+\eta^2\right]\Big\}=-4\Big\{(\xi^2+\eta^2)-R^2\Big\}^2$$

есть величина несомнѣнно отрицательная, то полученное уравненіе есть уравненіе эллипса, имѣющаго центръ въ O; положеніе же и величина осей для разныхъ точекъ (ξ, η) неизмѣняемой фигуры различны; въ особенности замѣтимъ: (черт. 34)

1) что точки, лежащія на оси Ξ (для которыхъ $\eta = O$), чертятъ эллипсы:

$$\frac{x^2}{(\xi+R)^2}+\frac{y^2}{(\xi-R)^2}=1,$$

главныя оси которыхъ совпадаютъ съ осями OX и OY (черт. 34).

2) Точка $\mathfrak{M}_1$, имѣющая координаты $\xi=R$, $\eta=O$, движется на прямой $y=O$, т. е. по оси OX.

3) Точка $\mathfrak{M}_2$, имѣющая координаты $\xi=-R$, $\eta=O$, движется по прямой $x=O$, т. е. по оси OY.

Движеніемъ этого рода пользуются для черченія эллипсовъ; обыкновенный эллиптическій (эллипсографъ) циркуль состоитъ изъ линейки $ЮK\Xi$ съ карандашомъ K, который можетъ быть закрѣпленъ въ любой точкѣ линейки; два шпенька $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{M}_2$, прикрѣпленные къ той же линейкѣ, могутъ ходить по двумъ взаимно перпендикулярнымъ канавкамъ $\overline{X}OX$, $\overline{Y}OY$ или прорѣзамъ, сдѣланнымъ въ доскѣ, налагаемой на ту плоскость, на которой требуется начертить эллипсъ. K-> noe[?]

По исключеніи времени изъ равенствъ (66) мы получимъ, какъ сказано выше, уравненіе, заключающее x, y, ξ, η. Для постоянныхъ ξ, η уравненіе это представляетъ кривую линію, описываемую точкою (ξ, η) движущейся фигуры на неподвижной плоскости XOY.

Обратно, для постоянныхъ x, y уравненіе это, связывающее перемѣнныя величины ξ, η, есть аналитическое выраженіе кривой, вычерчиваемой точкою (x, y) плоскости XOY на движущейся фигурѣ.

Такъ, въ примѣрѣ 11-мъ точка x, y, вычерчиваетъ на плоскости $\Xi ЮY$ кругъ, центръ котораго, имѣетъ относительныя координаты: $\eta=O$, $\xi=-R$, а радіусъ равенъ $\sqrt{x^2+y^2}$.

II-18.19.

стр. 64. Въ примѣрѣ 12-мъ точка x, y вычерчиваетъ на плоскости $\Xi ЮY$ кривую 4-го порядка, выражаемую уравненіемъ (67), если въ немъ разсматривать: x, y какъ постоянныя, а ξ, η — какъ перемѣнныя; эти кривыя суть эпитрохоиды, образуемые при катаніи круга радіуса $2R$ по неподвижному внутреннему кругу радіуса R; нѣкоторыя изъ нихъ изображены на прилагаемомъ чертежѣ (черт. 35).

Если, обратно, плоская фигура будетъ двигаться такимъ образомъ, что двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, находящіяся въ плоскости фигуры и принадлежащія ей, будутъ постоянно проходить черезъ двѣ неподвижныя точки, то каждая точка неподвижной плоскости будетъ чертить эллипсъ на движущейся плоскости; на этомъ основано приспособленіе Леонардо да Винчи для обтачиванія оваловъ.

§ 19. Движеніе плоской фигуры, а слѣдовательно и того тѣла, которому она принадлежитъ, вполнѣ опредѣляется движеніемъ двухъ точекъ ея (назовемъ ихъ $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$), потому что если для всякаго момента времени извѣстно положеніе точекъ $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ на неподвижной плоскости, то можетъ быть опредѣлено, во всякій моментъ времени, положеніе на неподвижной плоскости какой угодно точки $\mathfrak{M}$ фигуры, такъ какъ разстоянія $[\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1}]$ и $[\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2}]$ сохраняютъ постоянныя величины. Собственно говоря, достаточно вполнѣ задать движеніе одной точки, напр. $\mathfrak{M}_1$; пусть:

$$x_1 = \varphi_1(t), y_1 = \varphi_2(t)$$

суть два уравненія выражающія это движеніе; движеніе же другой точки можетъ быть задано или однимъ изъ уравненій:

$$x_2 = \theta_1(t), y_2 = \theta_2(t)$$

или уравненіемъ абсолютной траэкторіи этой точки

$$\Phi(x_2, y_2) = 0,$$

такъ какъ другое уравненіе вполнѣ замѣняется заданіемъ разстоянія между точками $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ или заданіемъ положенія этихъ точекъ въ твердомъ тѣлѣ; пусть ξ_1, η_1 суть относительныя кооринаты точки

$\mathfrak{M}_1$, $\xi_2\ \eta_2$ — такія же координаты точки $\mathfrak{M}_2$, и намъ извѣстны функціи: $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\Theta_1(t)$; тогда изъ трехъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t) &= x_ю + \xi_1 \cos э - \eta_1 \sin э \\ \varphi_2(t) &= y_ю + \xi_1 \sin э + \eta_1 \cos э \\ \Theta_1(t) &= x_ю + \xi_2 \cos э - \eta_2 \sin э \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

мы можемъ опредѣлить въ функціи времени три величины: $x_ю$, $y_ю$, $э$ и этимъ движеніе тѣла опредѣлится вполнѣ.

Если задано движеніе точки $\mathfrak{M}_1$ и траэкторія точки $\mathfrak{M}_2$, то $x_ю$, $y_ю$ и $э$ придется опредѣлять изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(t) = x_ю + \xi_1 \cos э - \eta_1 \sin э \\ &\varphi_2(t) = y_ю + \xi_1 \sin э + \eta_1 \cos э \\ &\Phi[(x_ю + \xi_2 \cos э - \eta_2 \sin э), (y_ю + \xi_2 \sin э + \eta_2 \cos э)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (69)$$

Примѣръ 13. Плоская фигура движется такъ, что одна точка, которую мы примемъ за $Ю$, движется равномѣрно по окружности круга, радіуса R, вокругъ начала координатъ O, такъ что:

$$x_ю = R \cos \omega t, \quad y_ю = R \sin \omega t;$$

другая точка $\mathfrak{M}_2$, черезъ которую мы проведемъ ось Ξ и которая находится въ разстояніи L отъ первой, движется по оси OX; относительныя координаты этой точки суть: $\xi_2 = L$, $\eta_2 = o$ и траэкторія ея есть:

$$y_2 = 0.$$

И такъ уравненія (69) въ этомъ примѣрѣ получатъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} R \cos \omega t &= x_ю \\ R \sin \omega t &= y_ю \\ R \sin \omega t + L \sin э &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (69,\ а)$$

Для нахожденія уравненія траэкторіи какой либо точки (ξ, η) фигуры, придется поступить слѣдующимъ образомъ:

Изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}(x - R\cos\omega t) &= \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta\\ (y - R\sin\omega t) &= \eta\cos\vartheta + \xi\sin\vartheta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (70)$$

исключимъ ϑ, мы получимъ:

$$x^2 + y^2 - 2R(x\cos\omega t + y\sin\omega t) + R^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Изъ тѣхъ же уравненій мы опредѣлимъ $\sin\vartheta$:

$$\sin\vartheta = \frac{\xi(y - R\sin\omega t) - \eta(x - R\cos\omega t)}{\xi^2 + \eta^2};$$

но такъ какъ третье изъ уравненій (69,a) намъ даетъ:

$$\sin\vartheta = \frac{-R\sin\omega t}{L},$$

то мы получаемъ другое уравненіе, заключающее $\sin\omega t$, $\cos\omega t$; эти послѣднія величины надо исключить изъ полученныхъ двухъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}xR\cos\omega t + yR\sin\omega t &= \frac{x^2 + y^2 + R^2 - \xi^2 - \eta^2}{2}\\ \eta R\cos\omega t + \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{L} - \xi\right)R\sin\omega t &= x\eta - \xi y\end{aligned}\right\}\ldots (70\ \text{bis})$$

для того, чтобы получить уравненіе абсолютныхъ траэкторій описываемыхъ точками (ξ, η); это будутъ кривыя четвертаго порядка.

Уравненія абсолютныхъ траэкторій точекъ, находящихся на оси ЮΞ могутъ быть составлены болѣе простымъ путемъ; а именно при $\eta = 0$ уравненія (70) будутъ:

$$x = R\cos\omega t + \xi\cos\vartheta$$

$$y = R\sin\omega t + \xi\sin\vartheta$$

или

$$x = R\cos\omega t + \xi\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2\omega t}{L^2}}$$

$$y = R\sin\omega t\left(1 - \frac{\xi}{L}\right).$$

По исключеніи ωt мы получимъ изъ послѣднихъ равенствъ слѣдующее уравненіе траэкторій:

$$x = \sqrt{R^2 - \frac{y^2 L^2}{(L-\xi)^2}} + \xi \sqrt{1 - \frac{y^2}{(L-\xi)^2}}.$$

Кривыя этого рода имѣютъ форму яйцевидную и нѣкоторыя изъ нихъ изображены на чертежѣ 36; по виду отличаются онѣ отъ эллипсовъ тѣмъ, что кривизна обѣихъ вершинъ неодинакова *). Толстою чертою обозначенъ кругъ, описываемый точкою *Ю*. $Ю\mathfrak{M}_2\Xi$ есть одно изъ положеній оси $Ю\Xi$; $\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4\mathfrak{M}_5$ суть точки описывающія начерченныя траэкторіи.

Результатъ, получаемый чрезъ исключеніе времени изъ уравненій (70), представляетъ, при x и y постоянныхъ, уравненія между ξ и η; это суть уравненія тѣхъ кривыхъ, которыя описываютъ на движущейся фигурѣ точки плоскости XOY.

Задавъ движеніе одной изъ точекъ $\mathfrak{M}_1$ (ξ_1, η_1) неизмѣняемой фигуры по плоскости XOY, можно, для опредѣленія движенія всей фигуры, задать кривую описываемую нѣкоторою точкою m неподвижной плоскости на движущейся фигурѣ или плоскости $\Xi Ю \Upsilon$; пусть абсолютныя координаты этой точки суть: $x_m\ y_m$; это величины постоянныя, между тѣмъ какъ относительныя координаты $\xi_m\ \eta_m$ этой точки суть величины перемѣнныя; тѣ и другія связаны равенствами:

$$x_m = x_ю + \xi_m \cos \vartheta - \eta_m \sin \vartheta$$
$$y_m = y_ю + \xi_m \sin \vartheta + \eta_m \cos \vartheta,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ:

$$\xi_m = (x_m - x_ю) \cos \vartheta + (y_m - y_ю) \sin \vartheta$$
$$\eta_m = -(x_m - x_ю) \sin \vartheta + (y_m - y_ю) \cos \vartheta.$$

Пусть

$$\Theta(\xi_m, \eta_m) = 0$$

есть уравненіе кривой линіи, описываемой точкою m на движу-

---

*) Это лучше видно на чертежѣ 36*a*, гдѣ изображены кривыя, описанныя двумя точками не лежащими на оси $Ю\Xi$, причемъ положеніе точки O на плоскости XY, величина радіуса R и длина L были другія, чѣмъ на чертежѣ 36.

11-19.

щейся плоскости $\Xi Ю \Upsilon$; для опредѣленія: $x_ю$, $y_ю$ и ϑ въ функціи времени мы имѣемъ въ такомъ случаѣ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t) &= x_ю + \xi_1 \cos\vartheta - \eta_1 \sin\vartheta \\ \varphi_2(t) &= y_ю + \xi_1 \sin\vartheta + \eta_1 \cos\vartheta \\ \Theta &\left\{ \begin{matrix} (x_m - x_ю)\cos\vartheta + (y_m - y_ю)\sin\vartheta \\ (y_m - y_ю)\cos\vartheta - (x_m - x_ю)\sin\vartheta \end{matrix} \right\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Примѣръ 14. Точка $\mathfrak{M}_1$, которую мы примемъ за $Ю$, описываетъ окружность радіуса R вокругъ O:

Задано: $x_1 = -R\cos\omega t$; $y_1 = -R\sin\omega t$; $\dot\vartheta_m = 0$; $\xi_1 = 0$; $\eta_1 = 0$; $x_m = L$; $y_m = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_ю &= -R\cos\omega t \\ y_ю &= -R\sin\omega t \end{aligned}\right\} \text{ур. } 71^{\vartheta}, 71^{\xi}$$

и точка m, координаты который суть:

$$x_m = L;\ y_m = 0$$

движется по оси $Ю\Xi$; поэтому:

$$\eta_m = R\sin\omega t\cos\vartheta - (L + R\cos\omega t)\sin\vartheta = 0 \quad \text{ур. } 71^{\xi}$$

или

$$R\sin(\omega t - \vartheta) = L\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

$\vartheta = ?$

Для составленія уравненія траэкторій мы возьмемъ уравненія: (66)

$$x + R\cos\omega t = \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta$$

$$y + R\sin\omega t = \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta$$

изъ которыхъ можемъ составить два слѣдующія:

$$\xi - R\cos(\omega t - \vartheta) = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$

$$\eta - R\sin(\omega t - \vartheta) = y\cos\vartheta - x\sin\vartheta.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$, мы получимъ:

$$\xi R\cos(\omega t - \vartheta) + \eta R\sin(\omega t - \vartheta) = \frac{\xi^2 + \eta^2 + R^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

II-19.20.

Кромѣ того, изъ тѣхъ же уравненій мы найдемъ:

$$(x^2+y^2)\sin\vartheta = y\xi - \eta x - Ry\cos(\omega t-\vartheta) + Rx\sin(\omega t-\vartheta)\,.\quad (73)$$

Подставивъ сюда вмѣсто $\sin\vartheta$ его выраженіе изъ уравненія (72), мы получимъ второе изъ нижеслѣдующихъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned}\xi R\cos(\omega t-\vartheta)+\eta R\sin(\omega t-\vartheta) &= \frac{\xi^2+\eta^2+R^2-x^2-y^2}{2}\\ yR\cos(\omega t-\vartheta)+\left(\frac{x^2+y^2}{L}-x\right)R\sin(\omega t-\vartheta) &= y\xi-\eta x\end{aligned}\right\}\ldots (74)$$

По исключеніи же изъ этихъ послѣднихъ $\cos(\omega t-\vartheta)$ и $\sin(\omega t-\vartheta)$, мы получимъ уравненіе траэкторій.

Сравнивъ уравненіе (74) съ уравненіями (70 bis) примѣра 13-го, мы увидимъ, что разница между тѣми и другими заключается только въ слѣдующемъ: гдѣ въ уравненіяхъ (70 bis) стоятъ x, y, ξ, η и ωt, тамъ въ уравненіяхъ (74) стоятъ ξ, η, x, y и $(\omega t-\vartheta)$; поэтому по исключеніи угла $(\omega t-\vartheta)$ изъ уравненій (74) мы получимъ такое же уравненіе, какое получимъ изъ уравненій (70 bis) черезъ исключеніе угла ωt, разница будетъ только въ томъ, что x и y перемѣнятся мѣстами съ ξ и η; значитъ траэторіи, описываемыя точками неизмѣняемой фигуры на неподвижной плоскости въ движеніи настоящаго примѣра, суть тѣ самыя кривыя, которыя чертятся точками неподвижной плоскости на движущейся фигурѣ при движеніи, разсматриваемомъ въ примѣрѣ 13-мъ. Нѣкоторыя изъ этихъ кривыхъ изображены на чертежѣ 37.

Вообще, движеніе разсмотренное въ этомъ примѣрѣ, есть, такъ сказать, обращенное движеніе примѣра 13-го; одно обращается въ другое, если подвижная и неподвижная плоскости перемѣняются ролями.

§ 20. **При изученіи какого-либо вращательнаго движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки *Ю* совершенно достаточно разсмотрѣть движеніе точекъ тѣла, находящихся на поверхности какой-либо одной сферы, имѣющей своимъ центромъ неподвижную точку *Ю*, потому что движеніе всякой точки $\mathfrak{M}'$ тѣла, ненаходящейся на этой сферѣ, вполнѣ опредѣляется движеніемъ той точки $\mathfrak{M}$ этой сферы, которая находится на одной линіи съ точками $\mathfrak{M}'$ и *Ю*.**

Подобное разсмотреніе вращательнаго движенія твердаго тѣла представляетъ нѣкоторую аналогію съ приведеннымъ въ преды-

дущемъ параграфѣ разсмотрѣніемъ движенія твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости; подобно тому какъ тамъ, мы и здѣсь можемъ разсматривать вмѣсто движенія всего тѣла движеніе неизмѣняемой фигуры, принадлежащей тѣлу; здѣсь эта фигура сферическая.

Мы представимъ себѣ двѣ совпадающія сферы S и $\mathfrak{S}$ радіуса равнаго единицѣ и общій центръ которыхъ находится въ *Ю*; всѣ точки сферы S неподвижны, всѣ точки сферы $\mathfrak{S}$ неизмѣнно связаны съ твердымъ тѣломъ; вращательное движеніе послѣдняго вокругъ точки *Ю* вполнѣ опредѣляется движеніемъ сферы $\mathfrak{S}$ по сферѣ S.

Пусть Z' (черт. 38) есть точка пересѣченія сферы S осью $ЮZ'$ и большой кругъ $Z'X'$ — пересѣченіе ея плоскостью $Z'ЮX'$.

Пусть $\mathbf{Z}$ есть точка пересѣченія сферы $\mathfrak{S}$ осью $Ю\mathbf{Z}$ и большой кругъ $\mathbf{Z}\Xi$ — пересѣченіе ея плоскостью $\mathbf{Z}Ю\Xi$.

Положеніе какой-либо неподвижной точки на сферѣ S опредѣляется сферическими координатами φ и ψ.

Положеніе какой-либо точки на сферѣ $\mathfrak{S}$ опредѣляется сферическими координатами: угломъ f, составляемымъ радіусомъ векторомъ точки съ осью $Ю\mathbf{Z}$ и угломъ $\mathfrak{v}$, составляемымъ плоскостью, проходящею черезъ ось $\mathbf{Z}$ и радіусъ векторъ разсматриваемой точки, съ плоскостью $\mathbf{Z}Ю\Xi$.

Положеніе сферы $\mathfrak{S}$ на сферѣ S опредѣляется углами *ф*, *ж* и *э*.

Координаты ψ и φ мы будемъ называть абсолютными сферическими, а координаты f и $\mathfrak{v}$ — относительными сферическими.

Прямоугольныя, абсолютныя и относительныя координаты выражаются въ сферическихъ слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}(x - x_{ю}) &= r\sin\varphi\cos\psi\\ (y - y_{ю}) &= r\sin\varphi\sin\psi\\ (z - z_{ю}) &= r\cos\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

$$\left.\begin{aligned}\xi &= r\sin f\cos\mathfrak{v}\\ \eta &= r\sin f\sin\mathfrak{v}\\ \zeta &= r\cos f\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

П-20.

Вслѣдствіе этого, равенства (45), если въ нихъ подставить вмѣсто косинусовъ угловъ между осями XYZ и $\Xi\Upsilon Z$ ихъ выраженія (47), (48), (49), (50), (51), (52), (53), (54), (55), вмѣсто разностей: $x - x_{ю}$, $y - y_{ю}$, $z - z_{ю}$ ихъ выраженія (75) и вмѣсто координатъ ξ, η, ζ — ихъ выраженія (76), примутъ слѣдующій видъ по сокращеніи обѣихъ частей всѣхъ равенствъ на r:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi\cos\psi &= \cos f \sin \text{ф} \cos \text{ж} - \sin f\,(\sin \text{ж} \sin(\text{э} + \mathfrak{b}) - \\
&\qquad - \cos \text{ж} \cos(\text{э} + \mathfrak{b}) \cos \text{ф}) \\
\sin\varphi\sin\psi &= \cos f \sin \text{ф} \sin \text{ж} + \sin f\,(\cos \text{ж} \sin(\text{э} + \mathfrak{b}) + \\
&\qquad + \sin \text{ж} \cos(\text{э} + \mathfrak{b}) \cos \text{ф}) \\
\cos\varphi &= \cos f \cos \text{ф} - \sin f \sin \text{ф} \cos(\text{э} + \mathfrak{b})
\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Если ф, ж и э даны какъ извѣстныя функціи времени:

задано: найти f и ψ

$$\text{ф} = F_1(t),\ \text{ж} = F_2(t),\ \text{э} = F_3(t)\ ,\ \varphi\ ,\ \psi\ ,$$

то уравненія (77), даже два изъ нихъ, выражаютъ движеніе той точки сферы $\mathfrak{S}$, относительныя координаты которой суть: f и $\mathfrak{b}$; такъ, третье изъ уравненій (77) выражаетъ измѣненіе абсолютной координаты φ этой точки:

$$\cos\varphi = \cos f \cos F_1(t) - \sin f \sin F_1(t) \cos(\mathfrak{b} + F_3(t)).$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій время t, мы получимъ одно уравненіе сферической траэкторіи, которую описываетъ точка $(f, \mathfrak{b})$ сферы $\mathfrak{S}$ на сферѣ S.

Уравненіе это заключаетъ: f, $\mathfrak{b}$, φ и ψ; разсматривая f и $\mathfrak{b}$ какъ постоянныя, это уравненіе между перемѣнными φ и ψ имѣетъ вышесказанное значеніе. Обратно, если φ и ψ сдѣлать постоянными, то тоже самое уравненіе между перемѣнными f и $\mathfrak{b}$ представляетъ уравненіе сферической кривой, которую описываетъ точка (φ, ψ) неподвижной сферы S на движущейся сферѣ $\mathfrak{S}$.

II-20.

Примѣръ 15. Вращеніе земли.

180°-23°27'17",55 уголъ, дополняющій наклонъ полярной оси къ эклиптикѣ до 180°.

$$\text{ф} = \alpha$$

т. е. величинѣ постоянной;

— угловая скорость прецессіи.

$$\text{ж} = \omega t$$

ω_1 — угловая скорость суточнаго вращенія земли.

$$\mathfrak{v} = \omega_1 t$$

при $f = Const.$, $\psi = Const.$

Чтобы составить уравненіе сферическихъ траэкторій, мы возьмемъ третье изъ уравненій (77); изъ него получимъ:

$$\cos(\mathfrak{v} + \omega_1 t) = \frac{\cos f \cos \alpha - \cos \varphi}{\sin f \sin \alpha}$$

или

$$\omega_1 t = \arccos \frac{\cos f \cos \alpha - \cos \varphi}{\sin f \sin \alpha} - \mathfrak{v}.$$

Съ другой стороны, помноживъ уравненія на $\sin \text{ф} \cos \text{ж}$, $\sin \text{ф} \sin \text{ж}$, $\cos \text{ф}$ и сложивъ, получимъ:

$$\sin \varphi \sin \text{ф} \cos(\psi - \text{ж}) + \cos \varphi \cos \text{ф} = \cos f$$

(ту же формулу можемъ написать прямо, имѣя въ виду, что въ сферическомъ треугольникѣ, образуемомъ сторонами f, φ и ф, уголъ $(\psi - \text{ж})$ лежитъ противъ стороны f.

Изъ этой формулы слѣдуетъ:

$$\text{ж} = \psi - \arccos\left(\frac{\cos f - \cos \varphi \cos \text{ф}}{\sin \varphi \sin \text{ф}}\right).$$

Въ этомъ примѣрѣ это будетъ:

$$\omega t = \psi - \arccos\left(\frac{\cos f - \cos \varphi \cos \alpha}{\sin \varphi \sin \alpha}\right).$$

Приравнявъ два полученныя выраженія для t, мы получимъ уравненіе сферическихъ траэкторій:

$$\mathfrak{v} + \frac{\omega_1}{\omega}\psi = \arccos\left(\frac{\cos f \cos \alpha - \cos \varphi}{\sin f \sin \alpha}\right) + \frac{\omega_1}{\omega}\arccos\left(\frac{\cos f - \cos \varphi \cos \alpha}{\sin \varphi \sin \alpha}\right). \quad (78)$$

Частный случай: если

$$\omega_1 = 0$$

II-20.

то уравненіе (78) даетъ:

$$\cos\varphi = \cos f \cos\alpha - \sin f \sin\alpha \cos \mathfrak{v};$$

значитъ φ = постоянному; каждая точка сферы $\mathfrak{S}$ описываетъ кругъ на сферѣ S вокругъ точки Z; ψ измѣняется при этомъ по слѣдующему закону:

$$\psi = \omega t + \psi_0$$

гдѣ

$$\psi_0 = \arccos\left[\frac{\cos f - \cos\varphi \cos \text{ф}}{\sin\varphi \sin \text{ф}}\right]$$

и есть постоянная величина.

Б. Подобно движенію тѣла параллельно данной плоскости, вращательное движеніе твердаго тѣла около точки вполнѣ опредѣляется сферическимъ движеніемъ двухъ точекъ сферы $\mathfrak{S}$ или движеніемъ одной точки $\mathfrak{M}_1$ $(f_1, \mathfrak{v}_1)$ сферы $\mathfrak{S}$ и сферической траекторіею другой точки $\mathfrak{M}_2$ $(f_2, \mathfrak{v}_2)$ ея. или задана $\varphi_1=\varphi_1(t)$; $\psi_1=\psi_1(t)$; $\Phi(\varphi_2,\psi_2)=0$; $f_1, \mathfrak{v}_1, f_2, \mathfrak{v}_2$ числами; найти ф, ж, э.

Задано: $\varphi_1=\varphi_1(t)$, $\psi_1=\psi_1(t)$, $\varphi_2=\varphi_2(t)$, $\psi_2=\psi_2(t)$, $f_1, \mathfrak{v}_1, f_2, \mathfrak{v}_2$ числами; найти ф, ж

Шарниръ Гука. Примѣръ 16. Точка $\mathfrak{M}_1$, которую мы примемъ за точку $\mathbf{Z}$, движется даннымъ образомъ по меридіану: $Z'X'$, такъ что: шарниръ Гука стр. 98.

$$\text{ф} = F(t), \text{ж} = 0.$$ координаты на S точки $\mathfrak{M}_1$, т.е. числа

Точка же $\mathfrak{M}_2$, отстоящая отъ $\mathfrak{M}_1$ на 90°, движется по меридіану: $\psi = \alpha$; мы примемъ дугу $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ за $\mathbf{Z}\Xi$, такъ что

$$f_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathfrak{v}_2 = 0$$ координаты на Υ точки $\mathfrak{M}_2$

Остается опредѣлить движеніе Υ по S, т.е. кромѣ заданныхъ уже ф и ж, найти э.

и уравненіе траэкторіи точки $\mathfrak{M}_2$ есть: $\psi_2 = \alpha$.
гдѣ α — некоторая функція отъ t или же величина постоянная.

Для опредѣленія э, мы примѣнимъ первыя два равенства (77) къ точкѣ $\mathfrak{M}_2$; будетъ:

$$\sin\varphi_2 \cos\alpha = \cos \text{э} \cos \text{ф}$$

$$\sin\varphi_2 \sin\alpha = \sin \text{э};$$

$\cos\varphi_2 = -\sin\text{ф} \cdot \cos\text{э}$

отсюда:

$$\operatorname{tg} \text{э} = \operatorname{tg} \alpha \cos \textit{ф};$$

выраженія

$$\left.\begin{array}{l} \textit{ф} = F(t), \ \textit{ж} = 0; \\ \text{э} = \operatorname{arctg} (\cos \textit{ф} \operatorname{tg} \alpha) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (79)$$

опредѣляють вращательное движеніе тѣла.

Такъ какъ $\textit{ж} = o$, то сферическое движеніе точекъ сферы $\mathfrak{S}$ выражается равенствтами:

$$\left\{\begin{array}{l} \sin \varphi \cos \psi = \cos f \sin \textit{ф} + \sin f \cos \textit{ф} \cos (\text{э} + \mathfrak{b}) \\ \sin \varphi \sin \psi = \sin f \sin (\text{э} + \mathfrak{b}) \\ \cos \varphi = \cos f \cos \textit{ф} - \sin f \sin \textit{ф} \cos (\text{э} + \mathfrak{b}) \end{array}\right\} \ldots (80)$$

въ которыхъ $\textit{ф}$ и э выражаются функціями времени (79).

Изъ приведенныхъ трехъ равенствъ (80), третье слѣдуетъ изъ двухъ первыхъ; движеніе точки вполнѣ выражается двумя изъ нихъ.

Для того, чтобы составить уравненіе траэкторій въ этомъ примѣрѣ, мы беремъ второе изъ уравненій (80), изъ котораго слѣдуетъ:

$$\cos (\text{э} + \mathfrak{b}) = \frac{\sqrt{\sin^2 f - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}}{\sin f}$$

и

$$\text{э} + \mathfrak{b} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi \sin \psi}{\sqrt{\sin^2 f - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}}\right] \ldots\ldots (81)$$

Рѣшая затѣмъ первое и третье изъ равенствъ (80) относительно $\cos \textit{ф}$, для чего надо помножить первое на $\sin f \cos (\text{э} + \mathfrak{b})$ и придать къ нему третье помноженное на $\cos f$, мы получимъ:

$$\cos \textit{ф} (\cos^2 f + \sin^2 f \cos^2 (\text{э} + \mathfrak{b})) = \cos \varphi \cos f + \sin \varphi \cos \psi \sin f \cos (\text{э} + \mathfrak{b});$$

возвысивъ же въ квадратъ обѣ части этихъ равенствъ и сложивъ, мы найдемъ:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi = \cos^2 f + \sin^2 f \cos^2 (\text{э} + \mathfrak{b});$$

поэтому

$$\cos \textit{ф} = \frac{\cos \varphi \cos f + \sin \varphi \cos \psi \sqrt{\sin^2 f - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi}$$

II-20.41.

но

$$\cos \text{ф} = \frac{\operatorname{tg} \text{э}}{\operatorname{tg} \alpha};$$

поэтому мы имѣемъ кромѣ (81) еще другое выраженіе для э:

$$\text{э} = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\alpha\,\frac{\cos\varphi\cos f + \sin\varphi\cos\psi\sqrt{\sin^2 f - \sin^2\varphi\sin^2\psi}}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\psi}\right];$$

приравнявъ другъ другу эти два полученныя выраженія, мы получимъ искомое уравненіе траэкторій

$$\left.\begin{aligned} \text{ѣ} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{\sin^2 f - \sin^2\varphi\sin^2\psi}}\right] - \\ - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\left[\frac{\cos f\cos\varphi + \sin\varphi\cos\psi\sqrt{\sin^2 f - \sin^2\varphi\sin^2\psi}}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\psi}\right]\right) \end{aligned}\right\} \quad . . (82)$$

ѣ в функции от φ и ψ при заданном f

§ 21. Пусть твердое тѣло совершаетъ нѣкоторое вращеніе около точки $ю$ и вращеніе это выражается равенствами:

Разложение движения твердаго тела на части поступательную и вращательную

$$\text{ф} = \Phi_1(t);\ \text{ж} = \Phi_2(t);\ \text{э} = \Phi_3(t) \quad . . . . (83)$$

гдѣ ф, ж и э суть углы, выражающіе положеніе тѣла относительно осей координатъ: $ЮX'$, $ЮУ'$, $ЮZ'$ параллельныхъ осямъ OX, $OУ$, OZ.

Предположимъ теперь, что одновременно съ этимъ движеніемъ оси $ЮX'$, $ЮУ'$, $ЮZ'$ переносятся поступательнымъ движеніемъ, въ которомъ принимаетъ участіе и все тѣло, такъ что положеніе его относительно осей $ЮX'$, $ЮУ'$, $ЮZ'$ продолжаетъ измѣняться какъ выражаютъ равенства (83), точка же $Ю$ въ этомъ поступательномъ движеніи измѣняетъ свое положеніе какъ выражаютъ слѣдующія равенства:

$$x_ю = \varphi_1(t);\ y_ю = \varphi_2(t);\ z_ю = \varphi_3(t); \quad . . . . (84)$$

тогда тѣло будетъ совершать движеніе сложное, выражаемое совокупностью шести равенствъ: (83) и (84).

Обратно, какое бы то ни было движеніе твердаго тѣла:

$$\left.\begin{aligned} x_ю = \varphi_1(t);\ y_ю = \varphi_2(t);\ z_ю = \varphi_3(t) \\ \text{ф} = \Phi_1(t);\ \text{ж} = \Phi_2(t),\ \text{э} = \Phi_3(t) \end{aligned}\right\} \quad . . . . . . (85)$$

можно разсматривать какъ результатъ соединенія двухъ одновременно совершаемыхъ тѣломъ движеній:

вращательнаго вокругъ точки *Ю*, выражаемаго послѣдними тремя изъ приведенныхъ равенствъ,

и поступательнаго, въ которомъ, если его взять отдѣльно отъ вращательнаго, всѣ точки тѣла совершаютъ отъ своего начальнаго положенія такое же движеніе, какое совершаетъ отъ своего начальнаго положенія точка *Ю*, движеніе которой выражается первыми тремя изъ приведенныхъ шести уравненій.

Такимъ образомъ данное движеніе твердаго тѣла можно *разложить* на двѣ части: на вращательную вокругъ точки *Ю* и на поступательную общую съ точкою *Ю*.

Абсолютныя координаты всякой точки движущагося тѣла выражаются функціями времени:

$$x = \varphi_1(t) + F_1(t);\ y = \varphi_2(t) + F_2(t);\ z = \varphi_3(t) + F_3(t)\ \ .\ .\ \ (86)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} x - x_{ю} = F_1(t) &= \xi \cos(X\Xi) + \eta \cos(X\Upsilon) + \zeta \cos(XZ) \\ y - y_{ю} = F_2(t) &= \xi \cos(Y\Xi) + \eta \cos(Y\Upsilon) + \zeta \cos(YZ)\ \ .\ .\ .\ \ (87) \\ z - z_{ю} = F_3(t) &= \xi \cos(Z\Xi) + \eta \cos(Z\Upsilon) + \zeta \cos(ZZ) \end{aligned}$$

а косинусы: $\cos(X\Xi)$, $\cos(X\Upsilon)$ . . . выражаются въ $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ по формуламъ (47), (48) . . . . . (55).*)

Разсматривая эти выраженія, мы увидимъ, что абсолютныя координаты всякой точки движущагося тѣла выражаются функціями, состоящими изъ суммы двухъ частей каждая; первыя части, т. е. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, выражаютъ движеніе точки *Ю* и не зависятъ отъ вращательной части движенія тѣла, вторыя же части: $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, представляя законъ измѣненія разностей $(x - x_{ю})$, $(y - y_{ю})$, $(z - z_{ю})$ между абсолютными координатами разсматриваемой точки тѣла и точки *Ю*, зависятъ только отъ вращательнаго движенія тѣла вокругъ точки *Ю*; такимъ образомъ, разложеніе движенія тѣла на части поступательную и вращательную проявляется въ разложеніи на двѣ части функцій выражающихъ движеніе точекъ тѣла.

II-21.

Тоже самое движенiе твердаго тѣла можно разложить на вращательное движенiе вокругъ всякой другой точки и на поступательное движенiе, общее съ этою точкою. Возьмемъ напримѣръ точку *Я*, относительныя координаты которой суть: $\xi_я$, $\eta_я$, $\zeta_я$; равенства (86) и (87) даютъ слѣдующiя выраженiя абсолютнаго движенiя этой точки:

$$\left.\begin{aligned} x_я &= x_ю + \xi_я \lambda_x + \eta_я \mu_x + \zeta_я \nu_x \\ y_я &= y_ю + \xi_я \lambda_y + \eta_я \mu_y + \zeta_я \nu_y \\ z_я &= z_ю + \xi_я \lambda_z + \eta_я \mu_z + \zeta_я \nu_z \end{aligned}\right\}; \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

если эти равенства вычтемъ изъ равенствъ (86) и (87) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_я + \bar{\xi} \lambda_x + \bar{\eta} \mu_x + \bar{\zeta} \nu_x \\ y &= y_я + \bar{\xi} \lambda_y + \bar{\eta} \mu_y + \bar{\zeta} \nu_y \\ z &= z_я + \bar{\xi} \lambda_z + \bar{\eta} \mu_z + \bar{\zeta} \nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

гдѣ величины $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ означаютъ слѣдующiя разности:

$$\bar{\xi} = \xi - \xi_я; \bar{\eta} = \eta - \eta_я; \bar{\zeta} = \zeta - \zeta_я; \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Представимъ себѣ теперь, что черезъ точку *Я* проведены оси $Я\Xi_1$ $Я\Upsilon_1$ $ЯZ_1$ соотвѣтственно параллельныя осямъ $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $ЮZ$; въ такомъ случаѣ разности (90) будутъ представлять координаты точекъ тѣла относительно этихъ новыхъ осей Ξ_1 Υ_1 Z_1.

Если примѣнимъ равенства (89) и (86—87) къ одной и той же точкѣ *K* твердаго тѣла, то x y z равенствъ (89) должны быть тѣми же самыми функцiями времени, какъ и x y z равенствъ (86—87); но теперь, въ равенствахъ (89), эти функцiи разложены на части иначе чѣмъ въ равенствахъ (86—87), а именно вторыя части равенствъ (89) составлены: изъ функцiй времени: $x_я$, $y_я$, $z_я$, выражающихъ движенiе точки *Я*, и изъ суммъ:

$$\bar{\xi}\lambda_x + \bar{\eta}\mu_x + \bar{\zeta}\nu_x, \quad \bar{\xi}\lambda_y + \bar{\eta}\mu_y + \bar{\zeta}\nu_y, \quad \bar{\xi}\lambda_z + \bar{\eta}\mu_z + \bar{\zeta}\nu_z$$

II-21.

выражающихъ законъ измѣненія разностей координатъ $(x-x_я)$, $(y-y_я)$, $(z-z_я)$ во вращательномъ движеніи твердаго тѣла вокругъ $Я$; соотвѣдственно тому и самое движеніе всего тѣла можно разсматривать такъ, какъ будто бы оно было разложено: на вращательное вокругъ точки $Я$ и на поступательное, общее съ движеніемъ этой точки.

Понятно, что поступательная часть новаго разложенія полнаго движенія тѣла будетъ иная, чѣмъ прежняя, потому что движеніе точки $Я$ вообще говоря отличается отъ движенія точки $Ю$; мы прослѣдимъ это обстоятельство на примѣрѣ 13-мъ, причемъ будемъ обращать вниманіе и на вращательныя части движенія при разныхъ разложеніяхъ.

Въ этомъ примѣрѣ движеніе плоской неизмѣняемой фигуры задано какъ сложное изъ поступательнаго, представляемаго движеніемъ точки $Ю$ по окружности радіуса R:

$$x_ю = R\cos\omega t \quad y_ю = -R\sin\omega t$$

и изъ вращательнаго вокругъ оси проходящей черезъ точку $Ю$ и перпендикулярной къ плоскости XOY (черт. 39).

Если бы не было вращательнаго движенія, то каждая точка фигуры описывала бы окружность радіуса R, также какъ точка $Ю$, причемъ вся фигура оставалась бы параллельною самой себѣ; такъ напримѣръ въ теченіи времени t отъ момента $t=o$ точка $\mathfrak{M}_1$ $(\xi_1 = R,$ $\eta_1 = o)$ перешла бы изъ начальнаго своего положенія $\mathfrak{M}_1^\circ$ въ положеніе $\mathfrak{M}_1'$, причемъ она двигалась бы по окружности радіуса R, имѣющей центръ въ точкѣ $Ю^\circ$; точка $\mathfrak{M}_3$ $(\xi_3 = o,\ \eta_3 = R)$ перешла бы изъ начальнаго своего положенія $\mathfrak{M}_3^\circ$ въ положеніе $\mathfrak{M}_3'$, причемъ она двигалась бы по окружности радіуса R, имѣющей центръ въ точкѣ, абсолютныя координаты которой суть $x=o$ $y=R$; весь треугольникъ $\mathfrak{M}_3^\circ Ю^\circ \mathfrak{M}_1^\circ$ перешелъ бы поступательнымъ движеніемъ въ положеніе $\mathfrak{M}_3' Ю \mathfrak{M}_1'$.

Въ заданномъ движеніи къ этому присоединяется равномѣрное вращеніе фигуры вокругъ точки $Ю$, при которомъ направленіе всякой прямой линіи фигуры измѣняетъ свое наклоненіе къ оси X-овъ на

уголъ ω въ единицу времени и на уголъ ωt въ теченіи промежутка времени t; поэтому треугольникъ, нами рассматриваемый, будетъ имѣть въ моментъ t положеніе $\mathfrak{M}_3 Ю \mathfrak{M}_1$, отличающееся отъ положенія $\mathfrak{M}_3' Ю \mathfrak{M}_1'$ поворотомъ всего треугольника на уголъ $\vartheta = \omega t$ вокругъ точки $Ю$, такъ что уголъ $\mathfrak{M}_3' Ю \mathfrak{M}_3 = \omega t$.

Это же самое движеніе фигуры можно разложить на вращательное движеніе вокругъ точки $\mathfrak{M}_3$ (см. черт. 40) и на поступательное, представляемое полнымъ движеніемъ ея; полное движеніе этой точки, имѣющей относительныя координаты: $\xi_3 = o$ $\eta_3 = R$, выражается слѣдующимъ образомъ:

$$x_3 = R\cos\omega t - R\sin\omega t;\ y_3 = -R\sin\omega t + R\cos\omega t;$$

слѣдовательно $x_3 = y_3$, то есть эта точка движется по прямой линіи, проходящей черезъ начало координатъ O и составляющей углы въ 45^0 съ осями X и Y.

Если бы не было вращательнаго движенія вокругъ точки $\mathfrak{M}_3$, то каждая точка фигуры совершала бы движеніе по прямой линіи, параллельной линіи $\mathfrak{M}_3{}^\circ \mathfrak{M}_3$; въ теченіе времени отъ $t = o$ до момента t треугольникъ $\mathfrak{M}_3{}^\circ Ю^\circ \mathfrak{M}_1{}^\circ$ перешелъ бы въ положеніе $\mathfrak{M}_3 Ю' \mathfrak{M}_1'$.

Въ полномъ движеніи фигуры къ этому присоединяется вращеніе вокругъ $\mathfrak{M}_3$, вслѣдствіе котораго разсматриваемый треугольникъ поворачивается въ теченіи времени t на нѣкоторый уголъ, такъ что въ полномъ движеніи онъ приходитъ въ положеніе $\mathfrak{M}_3 Ю \mathfrak{M}_1$ — тоже самое, какъ и на чертежѣ 39; легко видѣть, что уголъ $Ю' \mathfrak{M}_3 Ю$ поворота треугольника вокругъ $\mathfrak{M}_3$ равняется углу поворота треугольника вокругъ $Ю$ (черт. 39), а такъ какъ сказанное относится къ промежутку времени произвольной величины, то нетрудно понять, что вращеніе вокругъ точки $\mathfrak{M}_3$ одинаково съ вращеніемъ вокругъ $Ю$, т. е. всякая прямая линія фигуры поворачивается, какъ при первомъ, такъ и при второмъ разложеніи полнаго движенія, равномѣрно, на уголъ ω въ единицу времени и на уголъ ωt въ теченіи времени t.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся что, при разложеніи одного и того же движенія неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости на

II-21.22.

вращательное движеніе вокругъ произвольной точки фигуры и на поступательное представляемое движеніе этой точки, вращательная часть движенія будетъ всегда одинакова, то есть въ теченіи того же времени фигура повернется на одинъ и тотъ же уголъ, будемъ ли мы разсматривать вращеніе вокругъ точки *Ю*, или точки $\mathfrak{M}_3$, или вокругъ точекъ $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ . . . . . .

Тоже самое имѣетъ мѣсто при всякомъ движеніи тѣла: вращательная часть движенія тѣла одинакова, возьмемъ ли мы за центръ вращенія точку *Ю*, точку *Я* или какую угодно точку тѣла, то есть всякія параллельныя другъ другу направленія, проведенныя внутри тѣла черезъ точки *Ю*, *Я* и др., будутъ вращаться вокругъ своихъ центровъ одинаковымъ образомъ, такъ какъ они должны сохранять свою параллельность всегда.

Изъ этого слѣдуетъ, что если мы представимъ себѣ двѣ совпадающія сферы S_1 и $\mathfrak{S}_1$ радіусовъ равныхъ единицѣ, съ общимъ центромъ въ точкѣ *Я* и двѣ совпадающія сферы S и $\mathfrak{S}$ радіусовъ равныхъ единицѣ съ общимъ центромъ въ точкѣ *Ю*; если предположимъ, что сфера S_1 движется поступательно вмѣстѣ со своимъ центромъ *Я*, а сфера S движется поступательно вмѣстѣ со своимъ центромъ *Ю*, сферы же $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}$ неизмѣнно связаны съ твердымъ тѣломъ, то движеніе сферы $\mathfrak{S}_1$ по сферѣ S_1 будетъ *вполнѣ тождественнымъ* съ движеніемъ сферы $\mathfrak{S}$ по сферѣ S.

§ 22. Скорости точекъ тѣла, движущагося поступательно. Если тѣло движется поступательно, то углы *ф*, *ж* и *э* остаются постоянными, слѣдовательно остаются также постоянными и косинусы $\lambda_x, \mu_x, \nu_x, \lambda_y, \mu_y, \nu_y, \lambda_z, \mu_z, \nu_z$; въ выраженіяхъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{ю} + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x \\ y &= y_{ю} + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y \\ z &= z_{ю} + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

измѣняются съ теченіемъ времени только:

$$x_{ю} = f_1(t) \quad y_{ю} = f_2(t) \quad z_{ю} = f_3(t),$$

такъ какъ относительныя координаты ξ, η, ζ точекъ твердаго тѣла

суть также величины постоянныя; если, имѣя это ввиду, возьмемъ производныя по t отъ обѣихъ частей равенствъ (91), то получимъ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_ю}{dt};\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy_ю}{dt};\ \frac{dz}{dt}=\frac{dz_ю}{dt}\ \ldots\ldots \quad (92)$$

Это значитъ, что скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла, движущагося поступательно, равны и параллельны скорости точки *Ю*, а слѣдовательно и другъ другу.

Если твердое тѣло движется поступательно, то одновременныя скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла равны и параллельны другъ другу.

§ 23. Скорости точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

Если точка *Ю* неподвижна, т. е. $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ постоянны, а углы $ф$, $ж$ и $э$ измѣняются даннымъ образомъ, то девять косинусовъ $\lambda_x\ \ldots\ldots\ \nu_z$ суть функціи времени; чтобы получить выраженія проэкцій на оси X, $У$, Z скорости какой либо точки $\mathfrak{M}$ (ξ, η, ζ) твердаго тѣла въ такомъ движеніи, мы должны опять взять производныя по времени отъ обѣихъ частей равенствъ (91), причемъ мы должны имѣть ввиду, что ξ, η, ζ, $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, суть величины постоянныя. Мы условимся обозначать знакомъ $\mathfrak{w}$ скорости точекъ твердаго тѣла во вращательномъ движеніи и будемъ называть ихъ для краткости *вращательными скоростями*; когда мы возьмемъ производныя отъ (91) по t, то получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X)=\xi\frac{d\lambda_x}{dt}+\eta\frac{d\mu_x}{dt}+\zeta\frac{d\nu_x}{dt}\\ \frac{dy}{dt}&=\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}У)=\xi\frac{d\lambda_y}{dt}+\eta\frac{d\mu_y}{dt}+\zeta\frac{d\nu_y}{dt}\\ \frac{dz}{dt}&=\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z)=\xi\frac{d\lambda_z}{dt}+\eta\frac{d\mu_z}{dt}+\zeta\frac{d\nu_z}{dt}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \quad (93)$$

Эта форма выраженія для проэкцій скорости $\mathfrak{w}$ не есть еще окончательная, такъ какъ входящія сюда производныя отъ косинусовъ $\lambda_x\ \ldots\ldots\ \nu_z$ должны быть выражены функціями угловъ $ф$, $ж$, $э$ и

II-23.

ихъ производныхъ по времени, для чего надо взять производныя по времени отъ равенствъ (47) . . . (55); мы сдѣлаемъ это постепенно путемъ разныхъ послѣдовательныхъ преобразованій, которыя дадутъ намъ возможность ближе ознакомиться съ нѣкоторыми общими качествами вращательныхъ скоростей $\mathfrak{w}$.

Прежде всего мы преобразуемъ вторыя части выраженій (93) такимъ образомъ, чтобы въ нихъ вошли вмѣсто относительныхъ координатъ ξ, η, ζ разности $x - x_ю$, $y - y_ю$, $z - z_ю$; пользуясь для этого выраженіями:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \lambda_x(x - x_ю) + \lambda_y(y - y_ю) + \lambda_z(z - z_ю) \\ \eta &= \mu_x(x - x_ю) + \mu_y(y - y_ю) + \mu_z(z - z_ю) \\ \zeta &= \nu_x(x - x_ю) + \nu_y(y - y_ю) + \nu_z(z - z_ю) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (94)$$

мы получимъ изъ (93):

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X) = A\,(x - x_ю) + R_1\,(y - y_ю) + Q\,(z - z_ю)$$

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Y) = R\,(x - x_ю) + B\,(y - y_ю) + P_1\,(z - z_ю)$$

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z) = Q_1\,(x - x_ю) + P\,(y - y_ю) + C\,(z - z_ю)$$

гдѣ черезъ A, B, C, P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 обозначены слѣдующія суммы:

$$A = \lambda_x \frac{d\lambda_x}{dt} + \mu_x \frac{d\mu_x}{dt} + \nu_x \frac{d\nu_x}{dt}$$

$$B = \lambda_y \frac{d\lambda_y}{dt} + \mu_y \frac{d\mu_y}{dt} + \nu_y \frac{d\nu_y}{dt}$$

$$C = \lambda_z \frac{d\lambda_z}{dt} + \mu_z \frac{d\mu_z}{dt} + \nu_z \frac{d\nu_z}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \lambda_y \frac{d\lambda_z}{dt} + \mu_y \frac{d\mu_z}{dt} + \nu_y \frac{d\nu_z}{dt} \\ Q &= \lambda_z \frac{d\lambda_x}{dt} + \mu_z \frac{d\mu_x}{dt} + \nu_z \frac{d\nu_x}{dt} \\ R &= \lambda_x \frac{d\lambda_y}{dt} + \mu_x \frac{d\mu_y}{dt} + \nu_x \frac{d\nu_y}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (95)$$

II- 23.24.

$$P_1 = \lambda_z \frac{d\lambda_y}{dt} + \mu_z \frac{d\mu_y}{dt} + \nu_z \frac{d\nu_y}{dt}$$

$$Q_1 = \lambda_x \frac{d\lambda_z}{dt} + \mu_x \frac{d\mu_z}{dt} + \nu_x \frac{d\nu_z}{dt}$$

$$R_1 = \lambda_y \frac{d\lambda_x}{dt} + \mu_y \frac{d\mu_x}{dt} + \nu_y \frac{d\nu_x}{dt}$$

Взявъ производныя по t отъ равенствъ (61, a, b, c) мы найдемъ, что A, B и C равны нулю, взявъ же производныя отъ равенствъ (62 a, b, c) мы найдемъ:

$$P_1 + P = 0;\ Q + Q_1 = 0,\ R + R_1 = 0,$$

а потому проэкціи вращательной скорости на неподвижныя оси координатъ выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X) &= (z - z_ю)\,Q - (y - y_ю)\,R \\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}У) &= (x - x_ю)\,R - (z - z_ю)\,P \\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z) &= (y - y_ю)\,P - (x - x_ю)\,Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (96)$$

§ 24. **Угловая скорость, измѣренія ея.** Предположимъ, что вращательное движеніе тѣла вокругъ неподвижной точки $Ю$ происходитъ параллельно неподвижной плоскости $XУ$; въ такомъ случаѣ, если возьмемъ точку $Ю$ и оси Ξ, Υ въ той же плоскости:

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \cos\vartheta, & \lambda_y &= \sin\vartheta, & \lambda_z &= 0, \\ \mu_x &= -\sin\vartheta, & \mu_y &= \cos\vartheta, & \mu_z &= 0, \\ \nu_x &= 0, & \nu_y &= 0, & \nu_z &= 1 \end{aligned}$$

и потому:

$$P = 0,\ Q = 0,\ R = \frac{d\vartheta}{dt};$$

слѣдовательно:

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X) = -(y - y_ю)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}У) = (x - x_ю)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z) = 0.$$

I-24.

Такое движеніе твердаго тѣла есть вращеніе его вокругъ неподвижной оси; явленіе это настолько просто и настолько всѣмъ извѣстно, что мы рѣшаемся прямо высказать слѣдующее:

При вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, скорость $\mathfrak{w}$ *каждой точки тѣла перпендикулярна къ кратчайшему разстоянію* ρ *этой точки отъ оси вращенія.*

Отношеніе $\mathfrak{w} : \rho$ *одно и тоже для всѣхъ точекъ тѣла; величина его равняется абсолютной величинѣ производной* $\frac{d\vartheta}{dt}$, *если подъ* ϑ *подразумѣваемъ уголъ между двумя проходящими черезъ ось вращенія плоскостями, одна изъ которыхъ неподвижна, а другая неизмѣнно связана съ тѣломъ.*

Производная $\frac{d\vartheta}{dt}$ есть отношеніе между безконечно малымъ угломъ, на который поворачивается тѣло вокругъ неподвижной оси въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени и величиною этого промежутка, то есть $\frac{d\vartheta}{dt}$ есть скорость измѣненія угла ϑ съ теченіемъ времени; по этому отношеніе

$$\frac{\mathfrak{w}}{\rho} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

называется *угловою скоростью* вращающагося тѣла.

Такъ какъ уголъ измѣряется отношеніемъ длины дуги части окружности къ длинѣ радіуса и слѣдовательно величина угла измѣряется отвлеченнымъ числомъ (причемъ единицею угловъ служитъ уголъ: $57^0 17' 44'',7$ . . . .), то всякая производная отъ угловой величины по времени измѣряется отношеніемъ отвлеченнаго числа ко времени, а слѣдовательно такое же измѣреніе (размѣръ) имѣетъ и угловая скорость.

Что угловая скорость измѣряется отношеніемъ отвлеченнаго числа ко времени видно еще и изъ того, что она есть отношеніе линейной скорости къ длинѣ, а первая есть отношеніе длины ко времени.

Вращающееся тѣло имѣетъ единицу угловой скорости, если точки его отстоящія отъ оси вращенія на единицу длины, имѣютъ вращательную скорость равную единицѣ.

$$\text{Единица угловой скорости} = \frac{\text{единицѣ скорости}}{\text{единиц. длины}} =$$

$$= \left[\frac{\text{единиц. длины}}{\text{единиц. времен.}}\right] \frac{1}{\text{единиц. длины}} = \frac{1}{\text{единиц. времен.}}$$

Величина единицы угловой скорости вполнѣ опредѣляется величиною единицы времени.

Если вращеніе твердаго тѣла вокругъ оси совершается съ постоянною угловою скоростью, то такое вращеніе называется *равномѣрнымъ вращеніемъ*.

При равномѣрномъ вращеніи съ единицею угловой скорости, принимая за единицу времени секунду средняго времени, всякая плоскость тѣла, проходящая черезъ ось вращенія, описываетъ въ секунду уголъ въ $57^\circ 17' 44'',7 \ldots\ldots$ то есть $\frac{360^\circ}{2\pi}$.

Суточное вращеніе земли вокругъ своей оси есть вращеніе равномѣрное, угловая скорость его равна:

$$\frac{2\pi}{86164{,}09}\left[\frac{1}{\text{сек. ср. вр.}}\right] = 0{,}0000729 \ldots \left[\frac{1}{\text{сек. ср. вр.}}\right]$$

потому что въ однѣ звѣздныя сутки плоскость всякаго меридіана описываетъ уголъ въ 360°, длина дуги котораго въ 2π разъ болѣе радіуса *).

§ 25. Мгновенная ось и угловая скорость твердаго тѣла вращающагося вокругъ неподвижной точки.

Изслѣдуя выраженія (96), мы можемъ составить себѣ общее

---

*) Если вращающееся вокругъ оси тѣло совершаетъ n оборотовъ въ минуту, то угловая скорость его равна:

$$\frac{2\pi n}{60}\left[\frac{1}{\text{секунда}}\right] = 0{,}104719755\,n \left[\frac{1}{\text{секунда}}\right];$$

такъ, если тѣло совершаетъ 6000 оборотовъ въ минуту или 100 въ секунду (а такія угловыя скорости и гораздо большія встрѣчаются не рѣдко, напримѣръ при вращеніи волчка и при вращеніи артиллерійскихъ снарядовъ выпущенныхъ изъ нарѣзныхъ орудій), то угловая скорость его будетъ равна:

$$628{,}3 \ldots\ldots \left(\frac{1}{\text{секунда}}\right).$$

понятіе о совокупности скоростей $\mathfrak{w}$, которыми обладаютъ одновременно всѣ точки тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

1) Если помножимъ равенства (96): первое—на $\frac{x - x_ю}{r}$, второе на $\frac{y - y_ю}{r}$, третье на $\frac{z - z_ю}{r}$, (гдѣ $r = Ю\mathfrak{M}$ есть радіусъ векторъ, соединяющій разсматриваемую точку твердаго тѣла $\mathfrak{M}$ съ точкою $Ю$), затѣмъ сложимъ ихъ, то получимъ во второй части нуль, а въ первой сумму, которая равна $\mathfrak{w} \cos(\mathfrak{w}, r)$, гдѣ $(\mathfrak{w}, r)$ есть уголъ, составляемый скоростью $\mathfrak{w}$ съ направленіемъ радіуса вектора $Ю\mathfrak{M}$, считая это направленіе отъ точки $Ю$ къ разсматриваемой точкѣ; полученный результатъ:

$$\mathfrak{w} \cos(\mathfrak{w}, r) = 0$$

выражаетъ, что скорость $\mathfrak{w}$, если неравна нулю, то перпендикулярна къ r. Это свойство вращательной скорости слѣдуетъ впрочемъ изъ самаго опредѣленія ея какъ скорости вращательнаго движенія тѣла вокругъ точки $Ю$.

2) Вращательная скорость точки $Ю$ равна нулю; кромѣ того есть еще безчисленное множество другихъ точекъ твердаго тѣла, вращательныя скорости которыхъ въ разсматриваемый моментъ равны нулю; изъ равенствъ (96), видно, что абсолютныя координаты такихъ точекъ должны удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$(z - z_ю)\,Q - (y - y_ю)\,R = 0; \quad (x - x_ю)\,R - (z - z_ю)\,P = 0;$$

$$(y - y_ю)\,P - (x - x_ю)\,Q = 0$$

или

$$\frac{x - x_ю}{P} = \frac{y - y_ю}{Q} = \frac{z - z_ю}{R}; \quad \ldots\ldots \quad (97)$$

значитъ: всѣ точки твердаго тѣла, которыя въ одинъ и тотъ же моментъ времени имѣютъ вращательную скорость равную нулю, лежатъ на одной прямой линіи, проходящей черезъ точку $Ю$; эта линія называется *мгновенною осью* тѣла вращающагося вокругъ точки $Ю$.

Изъ точки $Ю$ можно провести вдоль по мгновенной оси два взаимно-противоположныя направленія; мы означимъ черезъ Ω то

II-25.

изъ этихъ двухъ направленій, косинусы угловъ котораго съ осями координатъ опредѣляются, по величинѣ и по знаку, слѣдующими выраженіями:

$$\cos(\Omega,X)=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}};\ \cos(\Omega,Y)=\frac{Q}{V};\ \cos(\Omega,Z)=\frac{R}{V}\ldots(98)$$

гдѣ корню мы присвоиваемъ знакъ плюсъ.

3) Если помножимъ первое изъ равенствъ (96) на P, второе на Q, третье на R, сложимъ и раздѣлимъ на $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, то получимъ во второй части нуль, а въ первой:

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X)\cos(\Omega X)+\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Y)\cos(\Omega Y)+\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z)\cos(\Omega Z);$$

слѣдовательно:

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w},\Omega)=0$$

то есть скорость $\mathfrak{w}$ каждой точки не только перпендикулярна къ радіусу вектору r, какъ было показано выше, но перпендикулярна также и ко мгновенной оси; слѣдовательно *вращательная скорость всякой точки тѣла перпендикулярна къ плоскости проходящей черезъ мгновенную ось и черезъ радіусъ векторъ точки тѣла.*

Если изъ точки $\mathfrak{M}$ тѣла опустить перпендикуляръ $\mathfrak{M}E$ (черт. 41) на мгновенную ось, то къ нему будетъ также перпендикулярна вращательная скорость этой точки, потому что перпендикуляръ $\mathfrak{M}E$ находится въ плоскости, проходящей черезъ мгновенную ось и черезъ радіусъ векторъ точки.

4) Изъ формулъ (96) мы получимъ выраженіе для величины квадрата вращательной скорости, которое по формулѣ (59) преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{w}^2=\left(P^2+Q^2+R^2\right)\left[(x-x_ю)^2+(y-y_ю)^2+(z-z_ю)^2\right]-$$
$$-\left[(x-x_ю)P+(y-y_ю)Q+(z-z_ю)R\right]^2.$$

Разности между координатами точки $\mathfrak{M}$ и точки $Ю$ суть про-

II-25.

екціи радіуса вектора на оси координатъ, а вмѣсто P, Q, R мы можемъ поставить ихъ выраженія, получаемыя изъ равенствъ (98), тогда получимъ:

$$\mathfrak{w}^2 = \left(P^2 + Q^2 + R^2\right)\left[r^2 - r^2\cos^2(\Omega,r)\right]$$

или

$$\mathfrak{w}^2 = (P^2 + Q^2 + R^2)\,r^2\sin^2(\Omega,r);$$

откуда, по извлеченіи корня:

$$\mathfrak{w} = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.r\sin(\Omega,r) \ldots\ldots. (99)$$

Произведеніе $r\sin(\Omega,r)$ выражаетъ длину перпендикуляра $\mathfrak{M}E$ (черт. 41), поэтому:

$$\mathfrak{w} = \overline{\mathfrak{M}E}\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

или

с. Иҫ препорціональна отстоянію данной точки отъ мгновенной оси.

$$\frac{\mathfrak{w}}{\overline{\mathfrak{M}E}} = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \ldots\ldots. (100)$$

5. то есть *отношеніе вращательной скорости точки твердаго тѣла къ длинѣ кратчайшаго разстоянія ея до мговенной оси есть величина одинаковая для всѣхъ точекъ тѣла.*

Точки, одинаково отстоящія отъ мгновенной оси, имѣютъ равныя, а точки, находящіяся по одной линіи параллельной мгновенной оси, — равныя и параллельныя вращательныя скорости.

Изъ этого всего видно, что вращательныя скорости, которыми одновременно обладаютъ всѣ точки твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, таковы, что можно сказать, что въ этотъ моментъ все тѣло вращается вокругъ мгновенной оси Ω съ *угловою скоростью*:

$$\Omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2};$$

притомъ не только величина угловой скорости, но также и направленіе мгновенной оси, измѣняются съ теченіемъ времени, такъ какъ P, Q и R суть величины, вообще говоря, перемѣнныя.

II-26.

§ 26. Изображеніе угловой скорости длиною.

Представимъ себѣ, что мы совмѣстили мгновенную ось съ положительною осью $У$ и взяли точку тѣла на положительной оси Z, тогда:

$$P = 0, R = 0, x - x_ю = 0, y - y_ю = 0, Q > 0 \text{ и } (z - z_ю) > 0$$

и проэкціи вращательной скорости на оси $У$ и Z, какъ даютъ формулы (96), равны нулю, а проэкція ея на ось X имѣетъ положительную величину:

$$ю = (z - z_ю) Q,$$

то есть вращательная скорость, мгновенная ось и кратчайшее разстояніе точки тѣла до мгновенной оси суть три взаимно перпендикулярныя направленія, расположенныя другъ относительно друга также, какъ расположены положительныя оси X, $У$ и Z по отношенію другъ къ другу; *если представимъ себѣ, что наблюдатель стоитъ ногами въ Ю, головою по направленію мгновенной оси и смотритъ на какую либо точку* $\mathfrak{M}$ *твердаго тѣла, то увидимъ, что вращательная скорость этой точки направлена слѣва на право, по направленію кажущагося суточнаго движенія солнца (черт. 42).*

Угловую скорость изображаютъ длиною, заключающею въ себѣ столько единицъ длины и частей ея, сколько въ угловой скорости заключается единицъ угловой скорости и частей ея; эту длину откладываютъ по направленію мгновенной оси отъ точки *Ю*. Мы всегда будемъ предполагать, что угловая скорость изображена такимъ образомъ и подъ *направленіемъ угловой скорости* будемъ подразумѣвать направленіе мгновенной оси, такъ что угловой скорости мы будемъ приписывать *величину и направленіе*, обозначая то и другое знакомъ Ω, или др.

Если угловая скорость $\Omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$ изображена такимъ образомъ, то равенства (98) или:

$$P = \Omega \cos(\Omega X), Q = \Omega \cos(\Omega У), R = \Omega \cos(\Omega Z); \quad . . . \quad (101)$$

II - 26.27.

показываютъ, что P, Q и R можно разсматривать какъ *проэкціи угловой скорости на оси координатъ* X, $У$, Z; такъ какъ P, Q и R имѣютъ тѣ же измѣренія что и Ω, то это суть угловыя скорости нѣкоторыхъ вращеній вокругъ этихъ осей; въ главѣ о соединеніи движеній мы покажемъ, что это суть дѣйствительно угловыя скорости тѣхъ частей полнаго вращательнаго движенія, на которыя оно можетъ быть разложено, или изъ которыхъ оно можетъ быть составлено.

Длина Ω есть діагональ параллелопипеда, ребра котораго суть длины P, Q, R.

Изображая угловыя скорости длинами, мы не должны однако забывать, что онѣ измѣряются не единицами длины, но единицами угловой скорости, подобно тому какъ линейныя скорости, также изображаемыя длинами, измѣряются своею единицею.

§ 27. Выраженія P, Q, R въ функціяхъ *ф*, *ж*, *э* и ихъ производныхъ по времени.

Для составленія этихъ выраженій мы поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Вслѣдствіе неподвижности точки $Ю$:

$$\frac{dx_ю}{dt}=0;\ \frac{dy_ю}{dt}=0;\ \frac{dz_ю}{dt}=0;$$

поэтому проэкціи вращательной скорости какой либо точки твердаго тѣла на оси координатъ X, $У$, Z, могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X)&=\frac{d(x-x_ю)}{dt}\\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}У)&=\frac{d(y-y_ю)}{dt}\\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z)&=\frac{d(z-z_ю)}{dt}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (102)$$

пользуясь же выраженіями (96), мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(x-x_{ю})}{dt} &= (z-z_{ю})\ Q-(y-y_{ю})\,R \\ \frac{d(y-y_{ю})}{dt} &= (x-x_{ю})\ R-(z-z_{ю})\,P \\ \frac{d(z-z_{ю})}{dt} &= (y-y_{ю})\ P-(x-x_{ю})\,Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (103)$$

Эти равенства мы примѣнимъ къ тремъ точкамъ твердаго тѣла: №№ 1-й, 2-й, 3-й. Точка № 1-й находится на оси Ξ въ разстояніи равномъ единицѣ отъ точки $Ю$, № 2-й на оси Υ и № 3-й на оси Z, также въ разстояніи равномъ единицѣ отъ той же точки; относительныя и абсолютныя координаты этихъ точекъ слѣдующія:

№ 1-й	№ 2-й	№ 3-й
$\xi_1 = 1, \eta_1 = 0, \zeta_1 = 0$	$\xi_2 = 0, \eta_2 = 1, \zeta_2 = 0$	$\xi_3 = 0, \eta_3 = 0, \zeta_3 = 1$
$x_1 = x_{ю} + \lambda_x$	$x_2 = x_{ю} + \mu_x$	$x_3 = x_{ю} + \nu_x$
$y_1 = y_{ю} + \lambda_y$	$y_2 = y_{ю} + \mu_y$	$y_3 = y_{ю} + \nu_y$
$z_1 = z_{ю} + \lambda_z$	$z_2 = z_{ю} + \mu_z$	$z_3 = z_{ю} + \nu_z$.

Подставивъ въ равенства (103) координаты этихъ точекъ, мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda_x}{dt} = Q\lambda_z - R\lambda_y \ldots (a);\ \frac{d\mu_x}{dt} = Q\mu_z - R\mu_y \ldots (d); \\ &\qquad\qquad \frac{d\nu_x}{dt} = Q\nu_z - R\nu_y \ldots (g) \\ &\frac{d\lambda_y}{dt} = R\lambda_x - P\lambda_z \ldots (b);\ \frac{d\mu_y}{dt} = R\mu_x - P\mu_z \ldots (e); \\ &\qquad\qquad \frac{d\nu_y}{dt} = R\nu_x - P\nu_z \ldots (h) \\ &\frac{d\lambda_z}{dt} = P\lambda_y - Q\lambda_x \ldots (c);\ \frac{d\mu_z}{dt} = P\mu_y - Q\mu_x \ldots (f); \\ &\qquad\qquad \frac{d\nu_z}{dt} = P\nu_y - Q\nu_x \ldots (i) \end{aligned}\right\} \ldots (104)$$

Возьмемъ теперь производныя по t отъ равенства (55):

$$-\sin\phi\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\nu_z}{dt}.$$

ü-27.

Отсюда, при помощи равенствъ (104 *i*), (53) (54) мы получимъ:

$$-\sin \phi \frac{d\phi}{dt} = P\nu_y - Q\nu_x = \sin \phi (P \sin ж - Q \cos ж);$$

по сокращеніи же на sin φ:

$$\frac{d\phi}{dt} = Q \cos ж - P \sin ж \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (105)$$

Возьмемъ далѣе производную по t отъ обѣихъ частей равенства (52), получимъ:

$$\frac{d\mu_z}{dt} = \cos \phi \sin э \frac{d\phi}{dt} + \sin \phi \cos э \frac{dэ}{dt};$$

съ другой стороны для производной отъ μ_z по t мы имѣемъ другое выраженіе: (104 *f*); подставивъ въ него вмѣсто μ_x и μ_y выраженія (50) и (51) этихъ косинусовъ въ тригонометрическихъ функціяхъ угловъ ϕ, $ж$ и $э$ и приравнявъ другъ другу два полученныя выраженія для $\frac{d\mu_z}{dt}$, мы получимъ слѣдующее равенство:

$$\cos \phi \sin э \frac{d\phi}{dt} + \sin \phi \cos э \frac{dэ}{dt} = P\mu_y - Q\mu_x =$$

$$= (P \cos ж + Q \sin ж) \cos э + (Q \cos ж - P \sin ж) \sin э \cos \phi.$$

Подставивъ сюда вмѣсто производной отъ ϕ по t выраженіе ея (105) и произведя надлежащія сокращенія, мы получимъ:

$$\sin \phi \frac{dэ}{dt} = P \cos ж + Q \sin ж \,.\,.\,.\,. \quad (106)$$

Рѣшивъ равенства (105) и (106) относительно P и Q, мы получимъ слѣдующія выраженія для этихъ величинъ:

$$P = \cos ж \sin \phi \frac{dэ}{dt} - \sin ж \frac{d\phi}{dt} \,.\,.\,.\,.\,. \quad (107)$$

$$Q = \sin ж \sin \phi \frac{dэ}{dt} + \cos ж \frac{d\phi}{dt} \,.\,.\,.\,.\,. \quad (108)$$

Возьмемъ равенство (104, h), замѣнимъ въ немъ P только что полученнымъ выраженіемъ (107), а вмѣсто косинусовъ $\nu_x\ \nu_y\ \nu_z$ подставимъ ихъ выраженія въ функціяхъ угловъ ф и ж; получимъ:

$$R\nu_x = R\sin\text{ф}\cos\text{ж} = \frac{d\nu_y}{dt} + P\nu_z = \cos\text{ф}\sin\text{ж}\frac{d\text{ф}}{dt} +$$

$$+\sin\text{ф}\cos\text{ж}\frac{d\text{ж}}{dt} + \cos\text{ф}\cos\text{ж}\sin\text{ф}\frac{d\text{э}}{dt} - \cos\text{ф}\sin\text{ж}\frac{d\text{ф}}{dt};$$

оттуда:

$$R = \cos\text{ф}\frac{d\text{э}}{dt} + \frac{d\text{ж}}{dt} \quad \dots\dots\dots \quad (109)$$

Если извѣстны функціи, выражающія законъ измѣненія угловъ ф, ж и э съ теченіемъ времени, то выраженія (107), (108) и (109) даютъ P, Q, и R для каждаго момента времени; слѣдовательно, мы имѣемъ возможность опредѣлить въ каждый моментъ направленіе мгновенной оси въ пространствѣ и величину угловой скорости вращающагося тѣла.

Такъ, въ примѣрѣ 15-мъ:

$$\text{ф} = \alpha,\quad \text{ж} = \omega t,\quad \text{э} = \omega_1 t,$$

гдѣ ω и ω_1 суть двѣ постоянныя величины.

Здѣсь

$$\frac{d\text{ф}}{dt} = 0,\quad \frac{d\text{ж}}{dt} = \omega,\quad \frac{d\text{э}}{dt} = \omega_1$$

а потому:

$$P = \omega_1\sin\alpha\cos\omega t;\quad Q = \omega_1\sin\alpha\sin\omega t;\quad R = \omega_1\cos\alpha + \omega,$$

то есть проэкція угловой скорости на ось Z имѣетъ постоянную величину, равно какъ и проэкція ея:

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \omega_1\sin\alpha$$

на плоскость XY; по этому вся угловая скорость постоянна:

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_1\omega\cos\alpha + \omega^2}$$

и составляетъ съ осью Z постоянный уголъ, косинусъ котораго равенъ:

$$\cos(\Omega, Z) = \frac{\omega_1 \cos\alpha + \omega}{\Omega}$$

а синусъ его:

$$\sin(\Omega, Z) = \frac{\omega_1 \sin\alpha}{\Omega}.$$

Мгновенная ось непрерывно измѣняетъ свое направленіе, описывая прямой конусъ, ось котораго совпадаетъ съ осью Z, а производящія составляютъ съ нею постоянный уголъ; плоскость, проведенная черезъ мгновенную ось и ось Z, вращается вокругъ оси Z равномѣрно съ угловою скоростью ω.

Движеніе, разсматриваемое въ этомъ примѣрѣ, совершается твердымъ тѣломъ, масса котораго расположена симметрично по отношенію къ оси $ЮZ$, если неподвижная точка $Ю$ есть центръ инерціи (центръ тяжести) и къ нему неприложено никакихъ силъ, но оно вращается по инерціи вслѣдствіе однажды сообщённаго ему толчка; кромѣ того такое тѣло можетъ принять подобное же движеніе при дѣйствіи на него силъ, подчиненныхъ нѣкоторымъ условіямъ; мы будемъ нѣсколько разъ возвращаться къ этому примѣру и въ своемъ мѣстѣ упомянемъ о нѣкоторыхъ случаяхъ движеній этого рода.

Б. Изъ полученныхъ выраженій (107), (108) и (109) мы составимъ слѣдующее выраженіе для величины угловой скорости:

$$\Omega = \sqrt{(\text{ф}')^2 + (\text{ж}')^2 + (\text{э}')^2 + 2\text{э}'\text{ж}'\cos\text{ф}} \quad \ldots \quad (110)$$

гдѣ

$$\text{ф}' = \frac{d\text{ф}}{dt}, \; \text{ж}' = \frac{d\text{ж}}{dt}, \; \text{э}' = \frac{d\text{э}}{dt};$$

кромѣ того, если принять во вниманіе, что:

$$\cos(XZ) = \nu_x = \sin\text{ф}\cos\text{ж}, \; \cos(УZ) = \nu_y = \sin\text{ф}\sin\text{ж};$$

$$\cos(ZZ) = \cos\text{ф}; \; \cos(NX) = -\sin\text{ж}; \; \cos(NУ) = \cos\text{ж},$$

гдѣ N есть направленіе, означенное на чертежѣ, помѣщенномъ на стр. 55, то выраженія для P, Q и R могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\Omega\cos(\Omega X) &= P = э'\cos(\mathbf{Z}X) + ф'\cos(NX)\\ \Omega\cos(\Omega У) &= Q = э'\cos(\mathbf{Z}У) + ф'\cos(NУ)\\ \Omega\cos(\Omega Z) &= R = э'\cos(\mathbf{Z}Z) + ж'\end{aligned}\right\}\ldots(111)$$

Величины $ф'$, $ж'$ и $э'$ имѣютъ измѣренія угловыхъ скоростей и, какъ увидимъ ниже, дѣйствительно суть угловыя скорости трехъ вращательныхъ движеній, изъ которыхъ разсматриваемое вращательное движеніе можетъ быть составлено; если изобразимъ эти угловыя скорости линіями отложеными: $ф'$—по направленію $ЮN$, $ж'$—по оси $ЮZ'$ и $э'$—по оси $Ю\mathbf{Z}$, то формулы (111) покажутъ намъ, что сумма проэкцій на которую либо изъ осей координатъ линій $ф'$, $ж'$ и $э'$ равняется проэкціи на ту же ось угловой скорости Ω; а намъ извѣстно, что это означаетъ, что линія Ω, $ф'$, $ж'$ и $э'$ имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій равныхъ и параллельныхъ имъ можно построить замкнутый четыреугольникъ; или, если мы построимъ паралеллопипедъ, одна вершина котораго будетъ въ точкѣ $Ю$, а три ребра будутъ совпадать съ $ф'$, $ж'$ и $э'$, то діагональ его $Ю\Omega$ (черт. 43) будетъ совпадать съ угловою скоростью Ω по величинѣ и направленію.

Формула (110) выражаетъ, что Ω равняется длинѣ этой діагонали.

При построеніи реберъ этого паралеллопипеда надо откладывать линіи $ф'$, $ж'$ и $э'$ по направленіямъ $ЮN$, $ЮZ'$ и $Ю\mathbf{Z}$, если эти производныя имѣютъ положительныя величины; если же которая либо изъ нихъ имѣетъ отрицательную величину, то изображающую ее длину надо отложить по отрицательному продолженію соотвѣтственнаго направленія или оси.

Производныя или угловыя скорости $ф'$ и $ж'$ называются: первая—*нутаціею*, вторая—*прецессіею* оси $Ю\mathbf{Z}$; нутація называется положительною, если уголъ $ф$ вслѣдствіе ея увеличивается, то есть если $ф'>0$; прецессія называется положительною, когда $ж'>0$. Эти названія примѣняются преимущественно тогда, когда говорятъ о вращательномъ движеніи такого тѣла, масса котораго расположена симметрично по отношенію къ оси $Ю\mathbf{Z}$; тогда называютъ угловую скорость $э'$ — угловою скоростью вращенія тѣла вокругъ его оси симметріи.

II-27.

Въ приведенномъ выше примѣрѣ 15-мъ вращеніе тѣла вокругъ своей оси симметріи сопровождается только прецессіей, нутаціи же нѣтъ; поэтому угловая скорость Ω есть діагональ параллелограмма, построеннаго на угловой скорости ϑ', изображенной длиною отложенною по оси Z, и на прецессіи ψ', изображенной длиною отложенною по оси Z'. Разсматривая вращательное движеніе этого примѣра, мы видѣли, что мгновенная ось, равномѣрно перемѣщаясь, описываетъ въ пространствѣ прямой круговой конусъ; вообще говоря, при вращательномъ движеніи тѣла вокругъ неподвижной точки мгновенная ось непрерывно измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, описывая нѣкоторую коническую поверхность; непрерывность измѣненія положенія мгновенной оси означаетъ, что уголъ между положеніями мгновенной оси въ началѣ и концѣ безконечно малаго промежутка времени — безконечно малъ; впрочемъ мыслимы и такія вращательныя движенія, при которыхъ мгновенная ось измѣняетъ свое положеніе на конечный уголъ въ теченіи безконечно малаго промежутка времени; объ этомъ будетъ упомянуто ниже.

В. Чтобы составить уравненіе конической поверхности, описываемой положеніями мгновенной оси въ пространствѣ, мы должны будемъ положить:

$$P = \frac{x_0}{r_0}, \quad Q = \frac{y_0}{r_0}, \quad R = \frac{z_0}{r_0};$$

въ равенствахъ (107), (108) и (109) и затѣмъ исключить изъ нихъ t и r_0; результатъ исключенія будетъ уравненіе конической поверхности, описываемой мгновенною осью въ пространствѣ.

Мы сдѣлаемъ это въ примѣненіи къ примѣру 16-му, въ которомъ:

$$\varphi = f(t); \quad \psi = 0; \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi;$$

слѣдовательно P, Q и R выразятся здѣсь такъ:

$$P = \vartheta' \sin \varphi; \quad Q = \varphi'; \quad R = \vartheta' \cos \varphi,$$

причемъ

$$\vartheta' = -\frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha} \varphi'.$$

Для того, чтобы составить уравненіе конической поверхности, мы помножимъ послѣднее равенство на $\text{э}'$ и придадимъ ему слѣдующій видъ:

$$\text{э}'^2 + (\text{э}'\cos\phi)^2 \operatorname{tg}^2\alpha = -\,\text{э}'\phi'\sin\phi\operatorname{tg}\alpha$$

затѣмъ исключимъ изъ него и изъ трехъ нижеслѣдующихъ равенствъ величины $\text{э}'$, ϕ' и функціи угла ϕ,

$$x_0 = r_0\text{э}'\sin\phi;\;\; y_0 = r_0\phi';\;\; z_0 = r_0\text{э}'\cos\phi.$$

Тогда получимъ:

$$x_0^2 + z_0^2 + z_0^2\operatorname{tg}^2\alpha + x_0 y_0 \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Это и есть уравненіе сказанной конической поверхности.

Твердое тѣло, вращающееся какъ указано въ этомъ примѣрѣ, движется такимъ образомъ, что ось $ЮZ$ остается въ плоскости $ZЮX'$, а ось $ЮΞ$ остается въ плоскости, проходящей черезъ ось $ЮZ'$ и составляющей уголъ α съ плоскостью $ZЮX'$ (черт. 44). Такое движеніе совершаетъ одна изъ частей сочлененія, служащаго для передачи вращательнаго движенія съ одного вала на другой, если оси этихъ валовъ пересѣкаются въ одной точкѣ и наклонены другъ къ другу подъ тупымъ угломъ, величину котораго приходится измѣнять смотря по обстоятельствамъ; это сочлененіе называется универсальнымъ или Кардановымъ сочлененіемъ или шарниромъ Гука (одни приписываютъ изобрѣтеніе его Кардану, другіе Гуку (Hooke, 1674).

Передача вращенія отъ одного вала A другому B производится черезъ посредство самаго шарнира $aba'b'$ (черт. 45 и 46) — твердаго тѣла крестообразнаго вида, крестовины котораго aa' и bb' взаимно перпендикулярны; концы крестовинъ имѣютъ форму круглыхъ шиповъ, вложенныхъ въ круглыя же гнѣзда Z, ζ, Ξ, ξ двухъ вилокъ: одной Zαζ наглухо придѣланной къ валу A, другой Ξβξ — наглухо придѣланной къ валу B; вилки эти устроены такимъ образомъ, что линія Zζ перпендикулярна къ оси A, а линія Ξξ — къ оси B и какъ эти линіи, такъ и оси A, B пересѣкаются въ одной точкѣ. Если оси A и B будутъ имѣть какое либо опредѣленное направленіе, причемъ будутъ составлять тупой уголъ одна съ другою, и мы будемъ вращать вилку Zαζ вокругъ оси A, то черезъ посредство шарнира $aba'b'$ будетъ вращаться и вилка Ξβξ, вмѣстѣ съ валомъ B, вокругъ оси послѣдняго; приэтомъ линія Ξξ будетъ оставаться въ плоскости круга перпендикулярнаго къ оси вала B, а линія Zζ въ плоскости круга перпендикулярнаго къ оси вала A; уголъ между плоскостями этихъ круговъ (уголъ α) равенъ дополненію до 180° тупаго угла, образуемаго осями валовъ A и B.

Однако передача вращенія через Гуковъ шарниръ сопровождается измѣненіемъ угловой скорости, то есть, если угловая скорость вала A будетъ постоянна, то угловая скорость вала B будетъ перемѣнная; въ самомъ дѣлѣ, угловая скорость вала A есть, очевидно, не что иное какъ $(-\phi')$, угловая же скорость вала B есть φ', гдѣ $\varphi=(Z'\Xi)$, то есть углу между осями Z' и Ξ; но для сферическаго треугольника $Z'\mathbf{Z}\Xi$ (черт. 44), въ которомъ: дуги

$$Z'\mathbf{Z}=\phi,\quad \mathbf{Z}\Xi=\frac{\pi}{2},\quad Z'\Xi=\varphi,$$

а углы

$$\mathbf{Z}Z'\Xi=\alpha,\quad Z'\mathbf{Z}\Xi=\pi-\vartheta,$$ где $\alpha=$ Const.

мы имѣемъ равенства:

$$\sin\varphi=\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha},\quad \cos\varphi=-\sin\phi\cos\vartheta;$$

взявъ производную отъ перваго изъ нихъ по времени и раздѣливъ на второе, получимъ:

$$\varphi'=-\frac{\vartheta'}{\sin\alpha\sin\phi};$$

въ свою же очередь ϑ' выражается въ ϕ' какъ видѣли выше, слѣдующимъ образомъ:

$$\vartheta'=-\frac{\sin\phi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\cos^2\phi\,\mathrm{tg}^2\alpha}\phi',$$

а поэтому:

$$\varphi'=\frac{\phi'}{\cos\alpha(1+\cos^2\phi\,\mathrm{tg}^2\alpha)}$$

или

$$\frac{\varphi'}{\phi'}=\frac{\cos^2\vartheta}{\cos\alpha};$$

отсюда видно, что при постоянной угловой скорости ϕ', угловая скорость φ' измѣняется съ измѣненіемъ угла ϑ; валъ B будетъ имѣть наибольшую угловую скорость:

$$\frac{\phi'}{\cos\alpha}$$

при $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ или $\dfrac{3\pi}{2}$ и наименьшую угловую скорость: $\phi'\cos\alpha$ при $\phi=0$ или π.

II-27.28.

Коническая поверхность, описываемая мгновенною осью въ пространствѣ, есть эллиптическій конусъ, ось котораго находится въ плоскости $X'Y'$ (черт. 44) и составляетъ уголъ $\frac{\pi+\alpha}{2}$ съ осью X' и уголъ $\frac{\alpha}{2}$ съ осью Y'; въ самомъ дѣлѣ, если, оставивъ ту же ось Z', мы отнесемъ конусъ къ новой оси $\overline{X}$, составляющей уголъ $\frac{\alpha}{2}$ съ прежнею, и къ новой оси $\overline{Y}$, совпадающей съ осью конуса, и, означивъ черезъ $\overline{x}$ и $\overline{y}$ координаты относительно этихъ новыхъ осей, сдѣлаемъ подстановку:

$$x = \overline{x}\cos\frac{\alpha}{2} - \overline{y}\sin\frac{\alpha}{2};\quad y = \overline{x}\sin\frac{\alpha}{2} + \overline{y}\cos\frac{\alpha}{2}$$

въ полученномъ выше уравненіи конической поверхности, то оно приметъ такой видъ:

$$\overline{x}^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{z^2}{\cos\alpha} = \overline{y}^2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

который показываетъ намъ, что сѣченіе конуса плоскостью перпендикулярною къ новой оси $\overline{Y}$ есть эллипсъ съ полуосями $\overline{y}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ въ плоскости XY и $\overline{y}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$ въ плоскости YZ'; послѣдняя полуось менѣе первой въ отношеніи:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Половина отверстія наибольшаго сѣченія конуса черезъ его ось равна $\frac{\alpha}{2}$ и половина отверстія наименьшаго сѣченія равна

$$\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right).$$

На черт. 44 изображена кривая линія пересѣченія этого конуса со сферою радіуса равнаго единицѣ; значеніе другаго конуса, объемлющаго, будетъ объяснено ниже.

§ 28. Проэкціи вращательныхъ скоростей на оси координатъ неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ.

Для того чтобы составить выраженіе проэкціи скорости $\mathfrak{w}$ на ось Ξ, надо помножить первое изъ равенствъ (93) на λ_x, второе на λ_y, третье на λ_z и по перемноженіи сложить; получимъ:

II-28.

$$\mathfrak{w}\left(\cos(\mathfrak{w}X)\cos(\Xi X)+\cos(\mathfrak{w}Y)\cos(\Xi Y)+\cos(\mathfrak{w}Z)\cos(\Xi Z)\right)=$$
$$=a\xi+r_1\eta+q\zeta.$$

или

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Xi)=a\xi+r_1\eta+q\zeta.$$

Если бы мы поступили съ уравненіями (93) подобнымъ же образомъ послѣ перемноженія ихъ, не на $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$, но на μ_x, μ_y, μ_z, то получили бы второе изъ нижеприведенныхъ равенствъ (112), а если бы помножили на ν_x, ν_y, ν_z, то получили бы третье изъ нихъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Xi)&=a\xi+r_1\eta+q\zeta\\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Upsilon)&=r\xi+b\eta+p_1\zeta\\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z)&=q_1\xi+p\eta+c\zeta\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(112)$$

Здѣсь $a, b, c, p, p_1, q, q_1, r, r_1$ имѣютъ слѣдующія значенія:

$$a=\lambda_x\frac{d\lambda_x}{dt}+\lambda_y\frac{d\lambda_y}{dt}+\lambda_z\frac{d\lambda_z}{dt}$$

$$b=\mu_x\frac{d\mu_x}{dt}+\mu_y\frac{d\mu_y}{dt}+\mu_z\frac{d\mu_z}{dt}$$

$$c=\nu_x\frac{d\nu_x}{dt}+\nu_y\frac{d\nu_y}{dt}+\nu_z\frac{d\nu_z}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned}p&=\nu_x\frac{d\mu_x}{dt}+\nu_y\frac{d\mu_y}{dt}+\nu_z\frac{d\mu_z}{dt}\\ q&=\lambda_x\frac{d\nu_x}{dt}+\lambda_y\frac{d\nu_y}{dt}+\lambda_z\frac{d\nu_z}{dt}\\ r&=\mu_x\frac{d\lambda_x}{dt}+\mu_y\frac{d\lambda_y}{dt}+\mu_z\frac{d\lambda_z}{dt}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(113)$$

$$p_1=\mu_x\frac{d\nu_x}{dt}+\mu_y\frac{d\nu_y}{dt}+\mu_z\frac{d\nu_z}{dt}$$

$$q_1=\nu_x\frac{d\lambda_x}{dt}+\nu_y\frac{d\lambda_y}{dt}+\nu_z\frac{d\lambda_z}{dt}$$

$$r_1=\lambda_x\frac{d\mu_x}{dt}+\lambda_y\frac{d\mu_y}{dt}+\lambda_z\frac{d\mu_z}{dt}$$

II-28.29.

Взявъ производныя по t отъ равенствъ (56), мы найдемъ, что a, b, c равны нулю; взявъ же производныя отъ равенствъ (57), мы найдемъ, что:

$$p + p_1 = 0, \quad q + q_1 = 0, \quad r + r_1 = 0,$$

а потому проэкціи вращательныхъ скоростей точекъ твердаго тѣла на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ нимъ, выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Xi) &= q\zeta - r\eta \\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Upsilon) &= r\xi - p\zeta \\ \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}Z) &= p\eta - q\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (114)$$

§ 29. Проэкціи угловой скорости на оси координатъ неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ. Аксоиды мгновенныхъ осей.

А. Такъ какъ равенства (114) вполнѣ подобны равенствамъ (96), то изъ нихъ мы выведемъ подобнымъ же образомъ какъ и изъ тѣхъ:

что уравненія мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ суть:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

и что величина угловой скорости равна

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Б. Для того, чтобы убѣдиться въ тождественности этой мгновенной оси и этой угловой скорости съ тѣми, которыя опредѣляются величинами P, Q, и R, мы выведемъ соотношеніе между P, Q, R и p, q, r.

Въ равенствахъ (113) мы замѣнимъ производныя отъ косинусовъ ихъ выраженіями (104), вслѣдствіе чего первое изъ этихъ равенствъ получитъ слѣдующій видъ:

$$p = P(\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y) + Q(\mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z) + R(\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x);$$

II-29.

въ силу же равенствъ (60) мы отсюда получимъ:

$$p = P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z.$$

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія равенства

$$\left.\begin{aligned} p &= P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z \\ q &= P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z \\ r &= P\nu_x + Q\nu_y + R\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (116)$$

которыя выражають, что:

$$p = \Omega\cos(\Omega\Xi);\ q = \Omega\cos(\Omega\Upsilon);\ r = \Omega\cos(\Omega\mathbf{Z}),\ \ldots (117)$$

а отсюда слѣдуетъ, что:

$$\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \Omega = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}.$$

Слѣдовательно p, q, r суть проэкціи угловой скорости Ω на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ неизмѣнно связанныя съ вращающимся твердымъ тѣломъ.

Понятно, что P, Q, R могутъ быть выражены въ p, q, r такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} P &= p\lambda_x + q\mu_x + r\nu_x \\ Q &= p\lambda_y + q\mu_y + r\nu_y \\ R &= p\lambda_z + q\mu_z + r\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (118)$$

Въ параграфѣ 27-мъ было показано, что длины, изображающія угловыя скорости Ω, $ф'$, $ж'$, $э'$, имѣютъ такія величины и направленія, что изъ длинъ равныхъ и параллельныхъ имъ можно составить замкнутый четыреугольникъ; изъ этого слѣдуетъ, что проэкція Ω на всякое направленіе равна суммѣ проэкцій на то же направленіе длинъ $ф'$, $ж'$, $э'$; проэктируя эти длины на направленія осей Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ и имѣя въ виду, что $ф'$ направлена по N, $ж'$ — по Z, а $э'$ — по $\mathbf{Z}$, мы получимъ:

$$p = \text{ж}' \cos(Z,\Xi) + \text{ф}' \cos(N,\Xi)$$
$$q = \text{ж}' \cos(Z,\Upsilon) + \text{ф}' \cos(N,\Upsilon)$$
$$r = \text{ж}' \cos(Z,\mathbf{Z}) + \text{э}';$$

если же принять во вниманіе, что:

$$\cos(Z,\Xi) = -\sin\text{ф}\cos\text{э};\quad \cos(Z,\Upsilon) = \sin\text{ф}\sin\text{э}$$
$$\cos(N,\Xi) = \sin\text{э},\quad \cos(N,\Upsilon) = \cos\text{э},$$

то получимъ слѣдующія выраженія проэкцій угловой скорости на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ, въ функціяхъ угловъ ф, ж, э и ихъ производныхъ по времени:

$$\left.\begin{aligned} p &= -\text{ж}'\sin\text{ф}\cos\text{э} + \text{ф}'\sin\text{э} \\ q &= \text{ж}'\sin\text{ф}\sin\text{э} + \text{ф}'\cos\text{э} \\ r &= \text{ж}'\cos\text{ф} + \text{э}' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (119)$$

Г. Кромѣ всѣхъ этихъ выраженій и формулъ, которыя понадобятся намъ, какъ въ кинематической части, такъ и въ динамикѣ твердаго тѣла, намъ надобны будутъ выраженія производныхъ по времени отъ косинусовъ $\lambda_x, \mu_x, \ldots \nu_z$ въ функціяхъ величинъ p, q, r; эти выраженія получатся изъ равенствъ (104), если замѣнимъ въ нихъ P, Q, R ихъ выраженіями въ p, q, r (118) и затѣмъ воспользуемся равенствами (60); тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} &= r\mu_x - q\nu_x; & \frac{d\mu_x}{dt} &= p\nu_x - r\lambda_x; & \frac{d\nu_x}{dt} &= q\lambda_x - p\mu_x; \\ \frac{d\lambda_y}{dt} &= r\mu_y - q\nu_y; & \frac{d\mu_y}{dt} &= p\nu_y - r\lambda_y; & \frac{d\nu_y}{dt} &= q\lambda_y - p\mu_y; \\ \frac{d\lambda_z}{dt} &= r\mu_z - q\nu_z; & \frac{d\mu_z}{dt} &= p\nu_z - r\lambda_z; & \frac{d\nu_z}{dt} &= q\lambda_z - p\mu_z; \end{aligned}\right\} \quad \ldots (120)$$

Если извѣстны функціи, выражающія законъ измѣненія угловъ ф, ж, э съ теченіемъ времени, то выраженія (119) даютъ p, q, r

II-29.

для каждаго момента времени; слѣдовательно мы имѣемъ возможность опредѣлить въ каждый моментъ времени направленіе мгновенной оси по отношенію къ осямъ Ξ, Υ, **Z**, то есть положеніе ея внутри самаго движущагося тѣла.

Такъ, въ примѣрѣ 15-мъ, гдѣ $\varphi' = o$, $\text{ж}' = \omega$, $\text{э}' = \omega_1$:

$$p = -\omega \sin\alpha \cos\omega_1 t;\quad q = \omega \sin\alpha \sin\omega_1 t;\quad r = \omega \cos\alpha + \omega_1,$$

то есть проэкція угловой скорости на ось **Z** имѣетъ постоянную величину, равно какъ и проэкція ея:

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \omega \sin\alpha$$

на плоскость ΞΥ; поэтому угловая скорость постоянна (какъ было уже показано при разсмотрѣніи этого примѣра въ § 27); она составляетъ съ осью **Z** постоянный уголъ, косинусъ и синусъ котораго равны:

$$\cos(\Omega\mathbf{Z}) = \frac{\omega\cos\alpha + \omega_1}{\Omega};\quad \sin(\Omega\mathbf{Z}) = \frac{\omega\sin\alpha}{\Omega};$$

а такъ какъ $\Omega\sin(\Omega Z') = \omega_1 \sin\alpha$ и притомъ $\alpha = (Z'\mathbf{Z})$ то: ЧР-26

$$\frac{\sin(Z'\mathbf{Z})}{\Omega} = \frac{\sin(\Omega Z')}{\omega_1} = \frac{\sin(\Omega\mathbf{Z})}{\omega} \quad \ldots\ldots \quad (121)$$

Эти равенства означаютъ, что длины, изображающія угловыя скорости ω, ω_1, Ω, имѣютъ такія величины и направленія, что, изъ линій равныхъ и параллельныхъ имъ, можно построить замкнутый треугольникъ, въ которомъ длинамъ ω, ω_1 Ω противолежатъ углы: $\Omega\mathbf{Z}$, $\Omega Z'$, $Z'\mathbf{Z}$; слѣдовательно, если мы по оси Z' отъ точки $Ю$ отложимъ длину $\overline{Юa}$ (черт. 47), изображающую угловую скорость ω, изъ точки a проведемъ длину $\overline{aA}$ равную и параллельную длинѣ $\overline{Юa_1}$, отложенной отъ точки $Ю$ по оси **Z** и изображающей угловую скорость ω_1, то, соединивъ точку $Ю$ съ точкою A, получимъ длину $\overline{ЮA}$, изображающую величину и направленіе угловой скорости Ω; это означаетъ также, что $\overline{ЮA} = \Omega$ есть діагональ параллелограмма, построеннаго на сторонахъ $\overline{Юa} = \omega$ и $\overline{Юa_1} = \omega_1$, какъ и было доказано уже въ параграфѣ 27-мъ.

Мы уже знаемъ, что мгновенная ось въ движеніи этого примѣра непрерывно измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, причемъ описываетъ

II-29.

вокругъ оси Z прямой конусъ, производящія котораго наклонены къ оси подъ постояннымъ угломъ: (ΩZ); теперь, выраженія p, q и r показываютъ, что мгновенная ось непрерывно измѣняетъ свое положеніе также и внутри твердаго тѣла, описывая внутри его другой круговой конусъ, производящія котораго составляютъ съ осью $\mathbf{Z}$ постоянный уголъ $(\Omega\mathbf{Z})$; плоскость, проведенная черезъ ось $\mathbf{Z}$ и мгновенную ось (и заключающая въ себѣ также ось Z'), составляетъ съ осью Ξ уголъ $\pi - \vartheta = \pi - \omega_1 t$; она вращается внутри тѣла вокругъ оси $\mathbf{Z}$ съ угловой скоростью $(-\omega_1)$ или вокругъ продолженія оси $\mathbf{Z}$ съ угловой скоростью ω_1.

D. Такъ какъ эти конусы воспроизводятся положеніями мгновенной оси въ пространствѣ и внутри движущагося тѣла, то ихъ называютъ осевыми поверхностями или *аксоидами* (axoïdes). Одинъ изъ нихъ, *аксоидъ неподвижный*, такъ сказать вычерчивается *въ пространствѣ* мгновенною осью, непрерывно измѣняющею свое положеніе въ пространствѣ; другой—*аксоидъ подвижный*, движется вмѣстѣ съ твердымъ тѣломъ, съ которымъ онъ неизмѣнно связанъ, и вычерчивается *въ тѣлѣ* мгновенною осью, непрерывно измѣняющею свое положеніе въ тѣлѣ или по отношенію къ осямъ Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$. Такіе аксоиды вычерчиваются мгновенною осью во всякомъ вращательномъ движеніи твердаго тѣла, а въ примѣрѣ 15-мъ они суть прямыя круговыя коническія поверхности, какъ сказано выше.

Въ этомъ параграфѣ мы ограничимся разсмотрѣніемъ взаимнаго положенія аксоидовъ для вращательныхъ движеній твердаго тѣла, приведенныхъ въ примѣрѣ 15-мъ.

Такъ какъ въ этихъ случаяхъ аксоиды суть круговые конусы и уголъ $\alpha = (Z\mathbf{Z})$ (черт. 47) между осями ихъ равенъ суммѣ угловъ $\beta = (Z'\Omega)$ и $(\alpha - \beta) = (\Omega\mathbf{Z})$, подъ которыми производящія конусовъ наклонены къ своимъ осямъ, и такое соотношеніе между этими углами существуетъ во всякій моментъ движенія твердаго тѣла, то мы вправѣ заключить, что, во всякій моментъ движенія, подвижный аксоидъ касается неподвижнаго по линіи, служащей мгновенною осью вращающемуся тѣлу въ разсматриваемый моментъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что движеніе, совершаемое подвижнымъ аксоидомъ вмѣстѣ съ твердымъ тѣломъ, вращающимся какъ указано въ этомъ примѣрѣ, есть равномѣрное катаніе, безъ скольженія, по поверхности неподвижнаго аксоида; чтобы вполнѣ убѣдиться въ этомъ, мы будемъ раз-

II-29.

сматривать вмѣсто самихъ аксоидовъ — круги, по которымъ эти аксоиды пересѣкаются сферою, имѣющею центръ въ точкѣ *Ю* (чертежи 47 и 48) и радіусъ равный единицѣ. Кругъ неподвижнаго аксоида самъ неподвиженъ, имѣетъ центръ на оси Z' и радіусъ его равенъ $\sin\beta$: кругъ подвижнаго аксоида имѣетъ центръ на оси $\mathbf{Z}$ и радіусъ равный $\sin(\alpha-\beta)$; оба круга касаются другъ друга въ той точкѣ, въ которой сферу пересѣкаетъ мгновенная ось. Разсмотримъ два положенія подвижнаго круга: одно въ моментъ t_1, когда подвижный кругъ касается неподвижнаго въ точкѣ Λ_1 (черт. 48), а ось $\mathbf{Z}$ находится въ положеніи $\mathbf{Z}_1$, другое положеніе въ моментъ t_2, когда подвижный кругъ касается неподвижнаго въ точкѣ Λ_2; та же точка подвижнаго круга, которая въ моментъ t_1 была въ положеніи Λ_1, находится въ моментъ t_2 въ положеніи Λ'_1. Легко показать, что дуга $\Lambda_2\Lambda'_1$ равна дугѣ $\Lambda_2\Lambda_1$; въ самомъ дѣлѣ: въ теченіи времени (t_2-t_1) плоскость, проходящая черезъ оси Z' и $\mathbf{Z}$ и заключающая мгновенную ось, поворачивается въ пространствѣ на уголъ равный $\omega\,(t_2-t)$, а это и есть уголъ $\Lambda_1Z'\Lambda_2$, поэтому:

$$\text{дуга } \Lambda_1\Lambda_2 = \omega\,(t_2-t_1)\sin\beta;$$

съ другой стороны, уголъ, на который поворачивается въ теченіи того же времени таже плоскость внутри твердаго тѣла, равенъ $\omega_1(t_2-t_1)$, а это есть уголъ $\Lambda'_1\mathbf{Z}_2\Lambda_2$, поэтому:

$$\text{дуга } \Lambda'_1\Lambda_2 = \omega_1\,(t_2-t_1)\sin(\alpha-\beta);$$

изъ равенствъ же (121) слѣдуетъ, что:

$$\omega\sin\beta = \omega_1\sin(\alpha-\beta),$$

поэтому:

$$\text{дуга } \Lambda'_1\Lambda_2 = \text{дугѣ } \Lambda_1\Lambda_2.$$

Такъ какъ показанное справедливо для всякаго промежутка времени (t_2-t_1), какъ бы малъ или великъ онъ ни былъ, то движеніе подвижнаго круга есть ни что иное, какъ катаніе его, безъ скольженія, по кругу неподвижному.

Движенія, опредѣляемыя въ примѣрѣ 15-мъ, могутъ разнообразиться тѣмъ, что углы α, β и $(\alpha-\beta)$ могутъ быть острыми или тупыми:

1) На чертежахъ 47 и 48 изображены аксоиды для тѣхъ случаевъ, когда всѣ три угла α, β, $(\alpha-\beta)$ острые. Такое вращательное движеніе совершаетъ удлиненное тѣло вращенія однородной плотности, вращаясь

II-29.

по инерціи вокругъ своего центра тяжести, причемъ ось симметріи тѣла совпадаетъ съ осью Z.

2) Если уголъ $(\alpha-\beta)$ равенъ прямому, то подвижный аксоидъ обратится въ плоскость (черт. 49), которая, имѣя точку $Ю$ неподвижною, катится безъ скольженія по неподвижному конусу; въ этомъ случаѣ равенства (121) примутъ слѣдующій видъ:

$$\omega_1 = \omega \sin\beta; \quad \Omega = \omega \cos\beta.$$

Такое движеніе совершаетъ круглый дискъ, опирающійся своимъ центромъ на шпиль $СЮ$, поставленный на горизонтальной плоскости, когда онъ катается по этой плоскости безъ скольженія; наблюдатель, смотрящій сверху на движущійся такимъ образомъ дискъ, увидитъ, что точка B (черт. 49 и 53) прикосновенія диска къ горизонтальной плоскости перемѣщается въ сторону означенную оперенною стрѣлкою по окружности BB_1B_2 (черт. 53), имѣющей центръ въ точкѣ C, причемъ радіусъ векторъ CB имѣетъ угловую скорость ω вокругъ оси $СЮZ'$; кромѣ того наблюдателю будетъ казаться, что дискъ поворачивается въ своей плоскости въ ту же сторону, такъ что, по совершеніи точкою прикосновенія диска съ плоскостью одного полнаго оборота по окружности BB_1B_2, радіусъ векторъ $ЮB$ диска приметъ положеніе $ЮB'$, по совершеніи двухъ оборотовъ - положеніе $ЮB''$ и т. д.

Это кажущееся вращеніе диска въ своей плоскости, совершающееся въ сторону противоположную вращенію диска вокругъ его оси симметріи $ЮZ$ (совершающемуся съ угловою скоростью ω_1 въ сторону, означенную на черт. 53 неоперенными стрѣлками), объясняется разностью угловыхъ скоростей ω и ω_1, или, что-тоже самое, избыткомъ длины окружности диска надъ окружностью круга BB_1B_2; въ самомъ дѣлѣ, въ то время, въ которое радіусъ векторъ CB совершитъ, съ угловою скоростью ω, полный оборотъ на 360° или на 2π, радіусъ векторъ $ЮB$, вмѣстѣ съ дискомъ повернется вокругъ оси $ЮZ$, съ угловою скоростью ω_1, на уголъ измѣряемый дугою BQB' и равный $360^\circ \sin\beta$ или $2\pi\sin\beta$; наблюдателю же будетъ казаться, что радіусъ $ЮB$ и весь дискъ повернулся въ противоположную сторону на уголъ $BЮB'$ равный разности:

$$2\pi - 2\pi \sin\beta$$

и это кажущееся вращеніе будетъ имѣть угловую скорость равную разности угловыхъ скоростей ω и ω_1:

$$\omega - \omega_1 = \omega - \omega \sin\beta = 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right).$$

II-29.

Чѣмъ ближе уголъ β къ $90°$ (см. черт. 50), тѣмъ медленнѣе будетъ это кажущееся вращеніе; такое движеніе совершаетъ медаль или монета приведенная на столѣ въ быстрое вращательное движеніе около одного изъ своихъ діаметровъ, когда вращеніе ея ослабѣетъ на столько, что продолжая кружится, она становится все болѣе и болѣе горизонтальною.

3) Если уголъ $(\alpha-\beta)$ болѣе прямаго угла, то аксоиды принимаютъ видъ, изображенный на черт. 51; такое вращательное движеніе совершаетъ по инерціи сплющенное тѣло вращенія однородной плотности, вращаясь вокругъ своего центра инерціи, причемъ ось симметріи тѣла совпадаетъ съ продолженіемъ $\overline{ЮZ}$ оси Z.

4) Если уголъ β тупой, а уголъ $(\alpha-\beta)$ острый, то аксоиды имѣютъ видъ, изображенный на чертежѣ 52; такое вращательное движеніе совершаетъ земля, вслѣдствіе суточнаго вращенія вокругъ ея оси и прецессіи (предваренія равноденствій); въ этомъ частномъ случаѣ $ЮZ'$ есть ось эклиптики, направленная къ сѣверному полюсу ея, $Ю$ — центръ земли, $ЮZ$ — ось земли, то есть та половина ея, которая направлена къ южному полюсу; еслибы не было прецессіи, то ось $ЮZ$ сохраняла бы неизмѣнное направленіе въ пространствѣ, въ дѣйствительности же земная ось перемѣщается въ пространствѣ, образуя ось подвижнаго конуса, имѣющаго весьма малый уголъ $(\alpha-\beta)$ и катящагося по неподвижному конусу, имѣющему уголъ $Z'ЮA = \alpha = 180° - 23°27'17'',55$ *). Подвижный конусъ катится по неподвижному, вслѣдствіе чего плоскость $Z'ЮZ$ совершаетъ прецессію въ сторону означенную (на черт. 52) опереннюю стрѣлкою; это направленіе противоположно годовому движенію солнца по эклиптикѣ, которое совершается справа на лѣво для наблюдателя, расположеннаго по положительной оси $ЮZ'$ эклиптики.

Предвареніе равноденствій составляетъ $50'',2592$ **) въ годъ или $0'',137229$ (въ дугѣ) въ звѣздныя сутки; ω_1 есть угловая скорость суточнаго вращенія земли, поэтому угловая скорость прецессіи равна:

$$\omega = \omega_1 \frac{0,137229}{360.60.60}.$$

Уголъ α между осями равенъ $180°-23°27'17'',55$. Уголъ $(\alpha-\beta)$ опредѣлится по формулѣ (121):

---

*) Въ дѣйствительности наклоненіе оси эклиптики къ земной оси измѣняется съ теченіемъ времени, такъ что приведенныя въ текстѣ цифры выражаютъ величину этого угла въ нѣкоторый моментъ 1880 года.

**) Прецессія также измѣняется съ теченіемъ времени; цифры, приведенныя въ текстѣ, относятся къ нѣкоторому моменту 1880 года.

II-29.30.

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\omega}=\frac{\sin\beta}{\omega_1},$$

въ которой, по чрезвычайной малости угла $(\alpha-\beta)$, мы можемъ замѣнить величину $\sin\beta$ величиною $\sin\alpha$, поэтому:

$$\sin(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)''\sin 1''=\frac{0{,}137229}{1296000}\sin 23^\circ 27' 17'',55;$$

отсюда мы находимъ:

$$(\alpha-\beta)''=\frac{0{,}137229}{2\pi}\sin 23^\circ 27' 17'',55=0'',00869.$$

Этотъ уголъ настолько малъ, что на поверхности земли ему соотвѣтствуетъ дуга въ 27 сантиметровъ длины; полный оборотъ оси Z вокругъ оси эклиптики совершается въ 25868 лѣтъ.

§ 30. Аксоиды. Годографы угловыхъ скоростей. Подвижный аксоидъ катится по неподвижному.

Для всякаго вращательнаго движенія вокругъ неподвижной точки, извѣстнаго настолько, что углы ф, ж и э выражены извѣстными намъ функціями времени, можемъ составить уравненіе неподвижнаго аксоида, если исключимъ время изъ слѣдующихъ уравненій.

$$\frac{x_0}{\text{э}'\cos\text{ж}\sin\text{ф}-\text{ф}'\sin\text{ж}}=\frac{y_0}{\text{э}'\sin\text{ж}\sin\text{ф}+\text{ф}'\cos\text{ж}}=\frac{z_0}{\text{э}'\cos\text{ф}+\text{ж}'};\quad(122)$$

подобнымъ же образомъ получимъ уравненіе подвижнаго аксоида въ относительныхъ координатахъ, исключивъ время изъ равенствъ.

$$\frac{\xi}{-\text{ж}'\cos\text{э}\sin\text{ф}+\text{ф}'\sin\text{э}}=\frac{\eta}{\text{ж}'\sin\text{э}\sin\text{ф}+\text{ф}'\cos\text{э}}=\frac{\zeta}{\text{ж}'\cos\text{ф}+\text{э}'}.\quad(123)$$

Мы займемся теперь разсмотрѣніемъ соотношенія, существующаго между обоими аксоидами.

Оба аксоида суть коническія поверхности, имѣющія общую вершину и, въ каждое мгновеніе, общую производящую—мгновенную ось; одинъ изъ аксоидовъ неподвиженъ, другой, будучи неизмѣнно связаннымъ съ твердымъ тѣломъ, вращается вмѣстѣ съ нимъ вокругъ точки $Ю$, причемъ производящія его приходятъ, послѣдовательнымъ образомъ, въ совпаденіе съ производящими аксоида неподвижнаго.

Двѣ коническія поверхности, имѣющія общую вершину и общую производящую, могутъ, или пересѣкаться, или касаться по ней;

II-30

мы докажемъ, что для аксоидовъ имѣетъ мѣсто послѣднее, то есть, что касательная плоскость, проведенная къ одному изъ аксоидовъ черезъ общую ихъ производящую, касательна въ тоже время и къ другому.

Такимъ образомъ подвижный аксоидъ совершаетъ свое движеніе по неподвижному; но движеніе данной конической поверхности, имѣющей неподвижную вершину, по другой данной неподвижной конической поверхности, имѣющей вершину въ той же точкѣ, можетъ быть весьма разнообразно.

Если мы отложимъ отъ вершины конусовъ, по общей ихъ производящей, длину равную единицѣ и будемъ сравнивать между собою площади поверхностей, описанныхъ этою длиною въ теченіи одного и того же времени на обѣихъ поверхностяхъ, то, смотря по роду движенія одной поверхности по другой, можемъ получить весьма различныя величины для отношенія между этими площадями.

Можетъ оказаться, что площадь, описанная на подвижномъ конусѣ, равна нулю, площадь же, описанная въ то же время на неподвижномъ конусѣ, имѣетъ нѣкоторую конечную величину; это покажетъ, что подвижный конусъ скользитъ одною изъ своихъ производящихъ по конусу неподвижному, а потому такое движеніе называется *скольженіемъ* подвижной конической поверхности по неподвижной.

Можетъ оказаться, что площадь, описанная въ теченіи всякаго промежутка времени на неподвижномъ конусѣ, равна площади, описанной въ то же время на подвижномъ конусѣ; такое движеніе называется *катаніемъ безъ скольженія* подвижнаго конуса по неподвижному

Если же площадь, описанная на подвижномъ конусѣ, менѣе или болѣе площади, описанной на неподвижномъ конусѣ, то катаніе одного конуса по другому сопровождается скольженіемъ.

Мы докажемъ, что движеніе подвижнаго аксоида по неподвижному есть *катаніе безъ скольженія*.

Такимъ образомъ соотношеніе между обоими аксоидами выражается слѣдующею теоремою, предложенною Пуансо (Poinsot).

Всякое вращательное движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки есть катаніе безъ скольженія нѣкоторой конической

поверхности, неизмѣнно связанной съ тѣломъ (подвижнаго аксоида), по неподвижной конической поверхности (неподвижному аксоиду); вершины обѣихъ поверхностей находятся въ неподвижной точкѣ.

Для доказательства этой теоремы мы разсмотримъ движеніе другъ по другу двухъ кривыхъ: одной, находящейся на подвижномъ, другой, — на неподвижномъ аксоидѣ; эти кривыя описываются на аксоидахъ точкою A, находящеюся на концѣ длины, изображающей угловую скорость Ω; онѣ названы Сомовымъ *годографами угловой скорости.*

Мы назовемъ кривую, описываемую точкою A на неподвижномъ аксоидѣ—*неподвижнымъ*, а кривую, описываемую ею на подвижномъ аксоидѣ—*подвижнымъ годографомъ угловой скорости.*

Мы покажемъ какъ составить уравненія этихъ кривыхъ линій и напишемъ выраженія косинусовъ угловъ, составляемыхъ касательными къ нимъ въ общей имъ точкѣ A, и выраженія длинъ дугъ, пробѣгаемыхъ точкою A по обоимъ годографамъ въ теченіи безконечно-малаго времени dt; затѣмъ мы докажемъ, что оба годографа имѣютъ въ общей точкѣ общую касательную и что длины дугъ, пробѣгаемыхъ точкою A по обоимъ годографамъ, равны.

Абсолютныя координаты точки A равны проэкціямъ на оси X, $У$, Z длины, изображающей угловую скорость; поэтому, если мы раздѣлимъ P, Q, R на единицу угловой скорости и помножимъ ихъ на единицу длины, т. е. помножимъ ихъ на произведеніе:

(единица времени). (единица длины),

которое мы изобразимъ для краткости такъ: *вд*, то получимъ абсолютныя координаты точки A:

$$\left.\begin{aligned} x &= P\,вд = вд\,(э'\cos ж \sin ф - ф'\sin ж) \\ y &= Q\,вд = вд\,(э'\sin ж \sin ф + ф'\cos ж) \\ в &= R\,вд = вд\,(э'\cos ф + ж') \end{aligned}\right\} \ldots (124)$$

Углы $ф$, $ж$ и $э$ суть функціи времени, равно какъ и производныя ихъ: $ф'$, $ж'$, $э'$; чтобы получить координаты абсолютныхъ положеній A_1, A_2, A_3, ... точки A въ моменты t_1, t_2, t_3, . . . мы должны, въ формулахъ 124, придать t эти значенія.

II-30

Если исключить время t изъ равенствъ (124), то получимъ два уравненія кривой линіи, описываемой въ пространствѣ точкою A; это и будутъ уравненія неподвижнаго годографа угловой скорости.

Въ теченіи безконечно-малаго времени dt, точка A, имѣвшая въ моментъ t абсолютныя координаты x, y, z, перемѣстится по неподвижному годографу на длину ds, проэкціи которой на неподвижныя оси координатъ равны:

$$dx = \textit{ед}.\frac{dP}{dt}dt;\; dy = \textit{ед}.\,\frac{dQ}{dt}dt; dz = \textit{ед}.\,\frac{dR}{dt}dt;\;.\,.\; (125)$$

изъ этого слѣдуетъ:

$$ds = \textit{ед}\sqrt{(P')^2 + (Q')^2 + (R')^2}\,dt;\;.\,.\,.\,.\,.\; (126)$$

косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями X, $У$, Z касательною къ неподвижному годографу въ точкѣ A, равны:

$$\left.\begin{aligned} \cos(T,X) &= \frac{dx}{ds} = \frac{P'}{W} \\ \cos(T,У) &= \frac{dy}{ds} = \frac{Q'}{W} \\ \cos(T,Z) &= \frac{dz}{ds} = \frac{R'}{W} \end{aligned}\right\};\;.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(127)$$

здѣсь входитъ знакъ W, которымъ мы означили слѣдующій корень:

$$W = \sqrt{\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2};$$

знакъ же T означаетъ направленіе касательной, проведенной въ сторону движенія точки A по неподвижному годографу изъ той точки на немъ, въ которой точка A находится въ моментъ t.

Относительныя координаты точки A равны проэкціямъ длины, изображающей угловую скорость, на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \textit{ед}.p = \textit{ед}.(-\textit{ж}'\sin\textit{ф}\cos\textit{э} + \textit{ф}'\sin\textit{э}) \\ \eta &= \textit{ед}.q = \textit{ед}.(\quad \textit{ж}'\sin\textit{ф}\sin\textit{э} + \textit{ф}'\cos\textit{э}) \\ \zeta &= \textit{ед}.r = \textit{ед}.(\quad \textit{ж}'\cos\textit{ф} + \textit{э}') \end{aligned}\right\}\;.\,.\,(128)$$

II-30.

ξ, η, ζ суть относительныя координаты точки A для момента t; чтобы получить относительныя координаты положеній A', A'', A''', . . . точки A въ твердомъ тѣлѣ въ моменты t_1, t_2, t_3 . . . . . , надо придать времени t, заключающемуся въ *ф*, *ж*, *э*, *ф'*, *ж'*, *э'*, эти значенія; t_1, t_2, t_3, ...

Если исключить время t изъ равенствъ (128), то получимъ два уравненія (въ относительныхъ координатахъ) кривой линіи, описываемой точкою A въ твердомъ тѣлѣ; это и будутъ уравненія подвижнаго годографа въ относительныхъ координатахъ.

Въ теченіи безконечно-малаго времени dt, точка A, имѣвшая въ моментъ t относительныя координаты ξ, η, ζ, перемѣстится по подвижному годографу на длину $d\sigma$, проэкціи которой на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равны:

$$d\xi = вд.\frac{dp}{dt}dt;\ d\eta = вд.\ \frac{dq}{dt}dt;\ d\zeta = вд.\ \frac{dr}{dt}dt;\ .\ .\ .\ (129)$$

изъ этого слѣдуетъ, что длина $d\sigma$ равна:

$$d\sigma = вд.\,w\,dt,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (130)$$

гдѣ временно введено обозначеніе:

$$w = \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2};$$

косинусы угловъ, составляемыхъ касательною къ подвижному годографу въ точкѣ (ξ, η, ζ) съ осями Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, равны:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\tau,\Xi) &= \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{p'}{w} \\ \cos(\tau,\Upsilon) &= \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{q'}{w} \\ \cos(\tau,\mathbf{Z}) &= \frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{r'}{w} \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (131)$$

гдѣ τ означаетъ направленіе касательной, проведенной въ сторону движенія точки A по подвижному годографу изъ той точки на немъ, въ которой точка A находится въ моментъ t.

II-30.

Для того, чтобы опредѣлить соотношеніе между длинами ds и $d\sigma$ и между направленіями T и τ, проведенными через общую точку годографовъ, мы должны найти зависимость между величинами P', Q', R' и p', q', r'.

Для этого возьмемъ производныя по времени отъ обѣихъ частей равенствъ (118); первое изъ нихъ даетъ:

$$P' = p'\lambda_x + q'\mu_x + r'\nu_x + p\lambda'_x + q\mu'_x + r\nu'_x;$$

вмѣсто $\lambda'_x, \mu'_x, \nu'_x$ и прочихъ подобныхъ производныхъ, мы подстановимъ ихъ выраженія (120), тогда получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} P' &= p'\lambda_x + q'\mu_x + r'\nu_x \\ Q' &= p'\lambda_y + q'\mu_y + r'\nu_y \\ R' &= p'\lambda_z + q'\mu_z + r'\nu_z \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (132)$$

изъ которыхъ, на основаніи извѣстныхъ свойствъ косинусовъ $\lambda_x, \ldots \nu_z$, получимъ:

$$(P')^2 + (Q')^2 + (R')^2 = (p')^2 + (q')^2 + (r')^2,$$

то есть $W = w$; мы условимся означать эти равные другъ другу корни знакомъ Ω съ точкою на верху, такъ:

$$\dot{\Omega} = \sqrt{\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \,. \quad (133)$$

Легко теперь видѣть, что изъ равенствъ (126), (130), (133) слѣдуетъ:

$$ds = e\partial\,\dot{\Omega}\,dt = d\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (134)$$

и что изъ равенствъ (132), (127), (131) можно составить слѣдующія равенства:

$$\cos(T,X) = \cos(\tau,\Xi)\lambda_x + \cos(\tau,\Upsilon)\mu_x + \cos(\tau,Z)\nu_x = \cos(\tau,X)$$

и также:

II-30

$$\cos(T, У) = \cos(\tau, У)$$

$$\cos(T, Z) = \cos(\tau, Z)$$

Послѣднія три равенства выражаютъ, что направленія T и τ совпадаютъ, то есть, что оба годографа имѣютъ въ точкѣ A общую касательную.

Равенство (134) выражаетъ, что точка прикосновенія перемѣщается въ теченіи безконечно малаго времени на такую же длину дуги по движущемуся годографу, на какую перемѣщается по годографу неподвижному; тоже самое справедливо для всякаго промежутка времени конечной продолжительности, потому что изъ равенства (134) мы можемъ получить интегрированіемъ въ предѣлахъ t_1 и t_2:

$$s_2 - s_1 = вд\int_{t_1}^{t_2} \dot{\Omega}\, dt = \sigma_2 - \sigma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что при вращеніи тѣла подвижный годографъ катится безъ скольженія по неподвижному; а такъ какъ послѣдняя кривая находится на поверхности неподвижнаго аксоида, а первая на поверхности подвижнаго, то легко понять, что подвижный аксоидъ катится безъ скольженія по неподвижному аксоиду.

Приводя это доказательство, мы не упоминали вовсе о тѣхъ случаяхъ, когда годографы имѣютъ точки излома, а аксоиды — ребра излома; по отношенію къ такимъ точкамъ и ребрамъ должно быть сдѣлано особое изслѣдованіе; не входя въ эти подробности, мы укажемъ только на нѣкоторые примѣры, въ которыхъ поверхности аксоидовъ имѣютъ изломъ по нѣкоторымъ изъ своихъ производящихъ.

Къ числу такихъ движеній относится движеніе твердаго тѣла, неизмѣнно связаннаго съ пирамидою, вершина которой неподвижна, а боковая поверхность катится безъ скольженія по неподвижной плоскости, заключающей эту вершину; въ этихъ случаяхъ мгновенная ось измѣняетъ свое положеніе слѣдующимъ образомъ: пирамида вращается вокругъ одного изъ своихъ реберъ $ЮA'$, пока грань ея $A'A''$ (черт. 54) не совпадетъ съ неподвижною плоскостью; въ

этотъ моментъ мгновенная ось, совпадавшая съ ребромъ $ЮA_1$, переходитъ, въ одно мгновеніе, въ положеніе $ЮA_2$ и остается въ немъ, пока пирамида вращается вокругъ ребра $ЮA''$, совпавшаго съ направленіемъ $ЮA_2$; а это продолжается до тѣхъ поръ, пока грань $A''ЮA'''$ не совмѣстится съ неподвижною плоскостью; такъ продолжается и далѣе. Подобнымъ же образомъ пирамида можетъ катиться безъ скольженія по другой неподвижной пирамидѣ (черт. 55). Въ этихъ случаяхъ мгновенная ось измѣняетъ свое положеніе толчками, описывая мгновенно конечныя углы; между такими толчками она сохраняетъ неизмѣнное направленіе.

Стороны пирамидъ могутъ быть не плоскія, а коническія, двугранные же углы при соотвѣтственныхъ ребрахъ $ЮA'$ и $ЮA_1$, $ЮA''$ и $ЮA_2$, ... могутъ быть взаимно дополняющими другъ друга до четырехъ прямыхъ, тогда движеніе тѣла будетъ происходить плавно и мгновенная ось будетъ измѣнять свое положеніе въ пространствѣ и въ твердомъ тѣлѣ постепенно безъ скачковъ, хотя аксоиды будутъ имѣть поверхности преломленныя по нѣкоторымъ производящимъ, т. е. по ребрамъ $ЮA_1$, $ЮA_2$, ... $ЮA'$, $ЮA''$, ...

Въ параграфѣ 27 мы составили уравненіе неподвижнаго аксоида для движенія Гукова шарнира (примѣръ 16); составимъ теперь уравненіе и опредѣлимъ видъ подвижнаго аксоида.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $ж = 0$, $ж' = 0$, то равенства (123) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\xi}{\psi'\sin\theta} = \frac{\eta}{\psi'\cos\theta} = \frac{\zeta}{\theta'}.$$

Возьмемъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$\psi = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right);$$

получимъ:

$$\psi' = -\frac{\theta'}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\theta\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\alpha}}};$$

откуда:

$$\psi'^2\cos^4\theta\operatorname{tg}^2\alpha - \psi'^2\sin^2\theta\cos^2\theta = \theta'^2,$$

Или, по умноженіи на квадратъ отъ ϕ':

$$(\phi'\cos\vartheta)^4\mathrm{tg}^2\alpha - (\phi'\sin\vartheta)^2(\phi'\cos\vartheta)^2 = (\vartheta'\phi')^2.$$

Чтобы получить уравненіе подвижнаго аксоида, надо исключить изъ этого равенства и изъ тѣхъ равенствъ, которыя заключаютъ координаты ξ, η, ζ, величины $\phi'\cos\vartheta$, $\phi'\sin\vartheta$ и ϑ'; получимъ:

$$\eta^4\mathrm{tg}^2\alpha - \eta^2\xi^2 = \zeta^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Пересѣченіе этой конической поверхности съ поверхностью сферы радіуса равнаго единицѣ (если возьмемъ линію $ЮY$ за полярную ось, а плоскость $YЮZ$ за первый меридіанъ) выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\varphi + \frac{\sin^2 2\psi}{4}\mathrm{tg}^4\varphi,$$

которое получится изъ уравненія аксоида, если въ немъ сдѣлаемъ:

$$\xi = \sin\varphi\sin\psi;\ \eta = \cos\varphi;\ \zeta = \sin\varphi\cos\psi.$$

Рѣшивъ полученное уравненіе сферической кривой относительно

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi},$$

мы получимъ четыре корня, изъ которыхъ два дѣйствительные:

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi} = \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2 2\psi}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Изъ этого равенства видно, что при измѣненіи угла ψ отъ 0 до 2π, φ колеблется между предѣлами: $\varphi = \alpha$ и

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\left[\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}\right] = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\alpha\,\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Такъ какъ $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ болѣе $\cos\alpha$, то φ_1 менѣе α.

Уголъ φ дѣлается: $\begin{cases} \text{равнымъ } \alpha \text{ при } \psi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2} \\ \text{равнымъ } \varphi_1 \text{ при } \psi = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}, \end{cases}$

II-30.31.

кривая имѣетъ на сферѣ центромъ точку Υ (черт. 44) и симметрична относительно восьми меридіональныхъ плоскостей, соотвѣтствующихъ вышеуказаннымъ угламъ.

При вращеніи валовъ *A* и *B* сочлененія (черт. 45), неружная коническая поверхность, неизмѣнно связанная съ крестообразнымъ шарниромъ, катится по внутренней неподвижной конической поверхности, уравненіе которой было выведено въ параграфѣ 27-мъ.

§ 31. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося какъ бы то ни было.

Если тѣло движется не поступательно и точка *Ю* не находится въ покоѣ, то проэкціи, на неподвижныя оси координатъ, скорости какой либо точки твердаго тѣла выразятся такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} w\cos(wX) &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx_{ю}}{dt} + \xi\frac{d\lambda_x}{dt} + \eta\frac{d\mu_x}{dt} + \zeta\frac{d\nu_x}{dt} \\ w\cos(wУ) &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy_{ю}}{dt} + \xi\frac{d\lambda_y}{dt} + \eta\frac{d\mu_y}{dt} + \zeta\frac{d\nu_y}{dt} \\ w\cos(wZ) &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz_{ю}}{dt} + \xi\frac{d\lambda_z}{dt} + \eta\frac{d\mu_z}{dt} + \zeta\frac{d\nu_z}{dt} \end{aligned}\right\}; \quad . \; . \; . \quad (136)$$

здѣсь буква w означаетъ величину и направленіе скорости точки $\mathfrak{M}$ твердаго тѣла, имѣющей относительныя координаты ξ, η, ζ; значеніе всѣхъ прочихъ символовъ — извѣстно.

Каждое изъ равенствъ (136) заключаетъ по четыре члена во второй части; первый членъ есть проэкція на одну изъ неподвижныхъ осей координатъ скорости $w_{ю}$ точки *Ю*, т. е.:

$$w_{ю}\cos(w_{ю}X) = \frac{dx_{ю}}{dt};\; w_{ю}\cos(w_{ю}У) = \frac{dy_{ю}}{dt};\; w_{ю}\cos(w_{ю}Z) = \frac{dz_{ю}}{dt}; \quad (137)$$

суммы остальныхъ трехъ членовъ въ каждомъ изъ этихъ равенствъ суть тѣ самыя выраженія, которыя мы преобразовали въ § 23 (см. формулы 93); они представляютъ проэкціи на оси *У*, *X*, *Z* той скорости, которую имѣла бы точка $\mathfrak{M}$ (ξ, η, ζ) твердаго тѣла, еслибы въ разсматриваемый моментъ точка *Ю* сдѣлалась неподвижною, а вращеніе тѣла вокругъ нея продолжалось бы безъ измѣненія; мы будемъ эту скорость называть, по прежнему, *враща-*

тельною скоростью точки $\mathfrak{M}$ (ξ, η, ζ) *вокругъ точки Ю* и сохранимъ прежнее для нея обозначеніе $\mathfrak{w}$.

Въ § 21 мы указывали на то, что всякое движеніе твердаго тѣла можно разсматривать какъ результатъ соединенія двухъ одновременныхъ простѣйшихъ движеній: вращательнаго вокругъ одной изъ точекъ его (напр. вокругъ *Ю* или *Я*) и поступательнаго, общаго съ движеніемъ этой точки; теперь мы покажемъ, что скорость w какой либо точки $\mathfrak{M}$ тѣла есть результатъ нѣкотораго соединенія скоростей ея въ поступательномъ и во вращательномъ движеніи тѣла.

Равенства (136) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left.\begin{aligned} w\cos(w,X) &= w_{ю}\cos(w_{ю},X)+\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w},X)\\ w\cos(w,У) &= w_{ю}\cos(w_{ю},У)+\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w},У)\\ w\cos(w,Z) &= w_{ю}\cos(w_{ю},Z)+\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w},Z)\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (138)$$

они выражаютъ, что проэкція скорости w на каждую изъ осей координатъ $X, У, Z$, равна суммѣ проэкцій, на ту же ось, скорости $\mathfrak{w}$ точки $\mathfrak{M}$ во вращательномъ движеніи тѣла вокругъ точки *Ю* и скорости ея $w_{ю}$ въ поступательномъ движеніи тѣла, представляемомъ движеніемъ точки *Ю*.

Такъ какъ оси X, $У$, Z суть три разныя, и притомъ ненаходящіяся въ одной плоскости, направленія, то изъ равенствъ (138) заключаемъ, что изъ длинъ равныхъ и параллельныхъ скоростямъ w, $w_{ю}$, $\mathfrak{w}$ можно составить замкнутый треугольникъ.

Если поэтому изъ точки $\mathfrak{M}$ (черт. 56) проведемъ длину $\overline{\mathfrak{M}П}$ равную и параллельную скорости $w_{ю}$, а изъ конца ея П проведемъ длину $\overline{ПW}$ равную и параллельную скорости $\mathfrak{w}$, то, соединивъ конецъ W послѣдней съ точкою $\mathfrak{M}$, получимъ длину $\overline{\mathfrak{M}W}$, изображающую величину и направленіе скорости w.

Можно поступить иначе: построить параллелограмъ, имѣющій вершиною точку $\mathfrak{M}$, а сторонами — длины $\overline{\mathfrak{M}П}$ и $\overline{\mathfrak{M}B}$ (послѣдняя представляетъ скорость $\mathfrak{w}$); діагональ параллелограмма, проведенная изъ $\mathfrak{M}$, изобразитъ скорость w.

II-31.32.

Такимъ образомъ мы можемъ сказать слѣдующее относительно соединенія скорости w изъ скоростей $w_ю$ и $\mathfrak{w}$:

При всякомъ движеніи твердаго тѣла, полная скорость w какой либо точки $\mathfrak{M}$ его изображается діагональю параллелограмма, построеннаго: на вращательной скорости точки $\mathfrak{M}$ вокругъ какой либо другой точки Ю тѣла и на проведенной изъ точки $\mathfrak{M}$ длинѣ, равной и параллельной скорости точки Ю.

§ 32. Геометрическое сложеніе и вычитаніе.

Геометрическое построеніе, посредствомъ котораго мы получили скорость w по скоростямъ $w_ю$ и $\mathfrak{w}$, называется *геометрическимъ сложеніемъ* скоростей $w_ю$ и $\mathfrak{w}$; ввиду того, что это дѣйствіе встрѣчается и примѣняется весьма часто въ механикѣ и что, при употребленіи надлежащихъ терминовъ и обозначеній, изложеніе многихъ теоремъ получаетъ желательную сжатость, мы познакомимъ читателя съ принятыми для этой цѣли терминами и символами.

Пусть имѣемъ нѣсколько линій конечной длины и опредѣленнаго направленія: линію A_1A_1' (черт. 57), имѣющую направленіе отъ A_1 къ A_1' и длину a_1, линію A_2A_2', имѣющую направленіе отъ A_2 къ A_2' и длину a_2, ... , наконецъ линію $A_nA'_n$, имѣющую направленіе отъ A_n къ A'_n и длину a_n.

Геометрическою суммою этихъ длинъ называется линія BB', имѣющая такое направленіе и такую длину b, что проекція ея на всякое направленіе равняется суммѣ проекцій на то же направленіе длинъ $a_1, a_2, \ldots . a_n$.

Построеніе величины и направленія этой линіи производится такъ: изъ какой либо точки O проведемъ длину $O\alpha_1$ равную и параллельную $A_1A'_1$, изъ точки α_1 проведемъ длину $\alpha_1\alpha_2$, равную и параллельную $A_2A'_2$ и т. д.; конецъ α_n послѣдней длины, равной и параллельной линіи $A_nA'_n$, соединимъ съ точкою O; линія $O\alpha_n$ будетъ равна и параллельна геометрической суммѣ линій $a_1, a_2 \ldots . a_n$ *).

---

*) Многоугольникъ $O\alpha_1\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_nO$ можетъ быть и не плоскимъ.

4-32.

Линіи $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... $A_nA'_n$ будутъ *геометрическими слагаемыми* этой суммы.

Чтобы означить, что длина и направленіе b есть геометрическая сумма длинъ и направленій a_1, a_2, ... a_n, принимаютъ слѣдующее обозначеніе:

$$\bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \ldots + \bar{a}_n, \quad \ldots\ldots \quad (139)$$

которое должно выражать, что проэкція длины b на всякое направленіе равна суммѣ проэкцій длинъ a_1, a_2, ... a_n на тоже направленіе; оно замѣняетъ собою три слѣдующія равенства:

$$b\cos(b,X) = a_1\cos(a_1X) + a_2\cos(a_2.X) + \ldots + a_n\cos(a_n,X)$$

$$b\cos(b,У) = a_1\cos(a_1У) + a_2\cos(a_2,У) + \ldots + a_n\cos(a_n,У)$$

$$b\cos(b;Z) = a_1\cos(a_1Z) + a_2\cos(a_2,Z) + \ldots + a_n\cos a_n;Z)$$

въ которыхъ X, $У$, Z суть три направленія взаимно перпендикулярныя или даже и неперпендикулярныя, но не лежащія въ одной плоскости.

Геометрическое вычитаніе длины AA' изъ длины BB' имѣетъ цѣлью найти такую длину CC', проэкція которой на какое либо направленіе равнялась бы разности проэкцій на то же направленіе длинъ AA' и BB'; для опредѣленія величины и направленія *геометрической разности* CC', надо изъ конца B' (черт. 58) *геометрически уменьшаемой длины* провести длину $B'A_1$, равную, параллельную, но прямопротивоположную *геометрически вычитаемой длинѣ* AA'; соединивъ точку B съ точкою A_1, получимъ длину BA_1 равную и параллельную искомой геометрической разности.

Это дѣйствіе обозначается слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

долженствующимъ выражать, что проэкція на всякое направленіе длины $c = CC'$ равна проэкціи, на то же направленіе, длины $b = BB'$

II-32.

безъ проэкціи длины $a = AA'$; это равенство замѣняетъ собою три слѣдующія равенства:

$$c\cos(c,X) = b\cos(b,X) - a\cos(a,X)$$
$$c\cos(c,У) = b\cos(b,У) - a\cos(a,У)$$
$$c\cos(c,Z) = b\cos(b,Z) - a\cos(a,Z)$$

Въ видѣ примѣненія этой терминологіи и этого обозначенія мы упомянемъ слѣдующее:

Вмѣсто того, чтобы говорить: «скорость движущейся точки есть діагональ параллелопипеда, построеннаго на длинахъ параллельныхъ осямъ координатъ и представляющихъ скорости x', y', z'» (стр. 27), мы можемъ выразиться такъ: «скорость v есть геометрическая сумма скоростей x', y', z'».

Символическое равенство:

$$\overline{v} = \overline{x'} + \overline{y'} + \overline{z'}$$

означаетъ, что проэкція скорости v на всякое направленіе равна суммѣ проэкцій скоростей x', y', z' на тоже самое направленіе.

Точно также мы можемъ сказать, что угловая скорость Ω есть геометрическая сумма угловыхъ скоростей $ф'$ $ж'$ и $э'$; это выражается символически слѣдующимъ равенствомъ:

$$\overline{\Omega} = \overline{ф'} + \overline{ж'} + \overline{э'},$$

изъ котораго мы получимъ извѣстныя намъ выраженія 107, 108, 109, 119 для P, Q, R, p, q, r; такъ, напримѣръ, проэктируя на ось X и имѣя ввиду, что: угловая скорость $ф'$ направлена по линіи N (см. чертежъ на стр. 55), угловая скорость $ж'$ по оси Z' и $э'$ по оси **Z**, мы получимъ равенство;

$$\Omega\cos(\Omega,X) = ф'\cos(N,X) + ж'\cos(Z',X) + э'\cos(\mathbf{Z},X),$$

то есть:

$$P = -ф'\sin ж + э'\cos ж \sin ф.$$

$$-M\left[\frac{d^2\omega}{dt^2}\cdot y_c + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 x_c\right] = \sum F_{ix} + N_{1x} + N_{2x}$$

$$M\left[\frac{d^2\omega}{dt^2}\cdot x_c - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 y_c\right] = \sum F_{iy} + N_{1y} + N_{2y}.$$

$$0 = \sum F_{iz} + N_{1z} + N_{2z}.$$

} дифференциальные уравнения движения центра инерции

Далее, определим проекции главного момента количеств движения тела (и) их производные.

$$l_x = \sum l_{ix} = \sum m_i v_{ix} = \sum m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy})$$

$$l_y = \sum l_{iy} = \sum m_i v_{iy} = \sum m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz})$$

$$l_z = \sum l_{iz} = \sum m_i v_{iz} = \sum m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix})$$

Но $v_{ix} = -\frac{d\omega}{dt} y_i$; $v_{iy} = +\frac{d\omega}{dt} x_i$; $v_{iz} = 0$;

поэтому

$$l_x = -\frac{d\omega}{dt}\sum m_i z_i x_i = -J_{xz}\frac{d\omega}{dt}$$

$$l_y = -\frac{d\omega}{dt}\sum m_i z_i y_i$$

$$l_z = +\frac{d\omega}{dt}\sum m_i x_i^2 + \frac{d\omega}{dt}\sum m_i y_i^2 = +\frac{d\omega}{dt}\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Величину $\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$ мы уже встретили в § 25 и обозначили символом J_{zz}.

Точно так же мы можем для каждого тела вычислить величины $\sum m_i x_i z_i$ и $\sum m_i y_i z_i$; назовем их соответственно J_{xz}

В таком случае производные от проекций главного момента количеств движения тела будут

$$l_x = -J_{xz}\frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{dl_x}{dt} = -J_{xz}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$l_y = -J_{yz}\frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{dl_y}{dt} = -J_{yz}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$l_z = +J_{zz}\cdot\frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{dl_z}{dt} = +J_{zz}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

Моменты сил относительно осей X, Y, Z будут

$$\sum L_{ix} - aN_{1y} + bN_{2y}$$

$$\sum L_{iy} + aN_{1x} - b\cdot N_{2x}$$

$$\sum L_{iz}$$

II-32.

безъ проэкціи длины $a = AA'$; это равенство замѣняетъ собою три слѣдующія равенства:

$$c\cos(c,X) = b\cos(b,X) - a\cos(a,X)$$
$$c\cos(c,Y) = b\cos(b,Y) - a\cos(a,Y)$$
$$c\cos(c,Z) = b\cos(b,Z) - a\cos(a,Z)$$

Въ видѣ примѣненія этой терминологіи и этого обозначенія мы упомянемъ слѣдующее:

Вмѣсто того, чтобы говорить: «скорость движущейся точки есть діагональ параллелопипеда, построеннаго на длинахъ параллельныхъ осямъ координатъ и представляющихъ скорости x', y', z'» (стр. 27), мы можемъ выразиться такъ: «скорость v есть геометрическая сумма скоростей x', y', z'».

Символическое равенство:

$$\overline{v} = \overline{x'} + \overline{y'} + \overline{z'}$$

означаетъ, что проэкція скорости v на всякое направленіе равна суммѣ проэкцій скоростей x', y', z' на тоже самое направленіе.

Точно также мы можемъ сказать, что угловая скорость Ω есть геометрическая сумма угловыхъ скоростей $ф'$ $ж'$ и $э'$; это выражается символически слѣдующимъ равенствомъ:

$$\overline{\Omega} = \overline{ф'} + \overline{ж'} + \overline{э'},$$

изъ котораго мы получимъ извѣстныя намъ выраженія 107, 108, 109, 119 для P, Q, R, p, q, r; такъ, напримѣръ, проэктируя на ось X и имѣя ввиду, что: угловая скорость $ф'$ направлена по линіи N (см. чертежъ на стр. 55), угловая скорость $ж'$ по оси Z' и $э'$ по оси $\mathbf{Z}$, мы получимъ равенство;

$$\Omega\cos(\Omega,X) = ф'\cos(\mathrm{N},X) + ж'\cos(Z',X) + э'\cos(\mathbf{Z},X),$$

то есть:

$$P = -ф'\sin ж + э'\cos ж \sin ф.$$

II-32.33.

Принявъ сказанную терминологію, мы можемъ выразить соотношеніе между скоростями w, $\mathfrak{w}$, $w_ю$ слѣдующими словами:

Скорость w какой бы то ни было точки $\mathfrak{M}$ твердаго тѣла есть геометрическая сумма вращательной скорости точки $\mathfrak{M}$ вокругъ другой точки Ю тѣла и скорости $w_ю$ послѣдней.

Символическое выраженіе этого соотношенія:

$$\overline{w} = \overline{w_ю} + \overline{\mathfrak{w}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

означаетъ, что проэкція, на всякое направленіе, скорости w равняется суммѣ проэкцій, на тоже направленіе, скоростей $w_ю$ и $\mathfrak{w}$.

§ 33. Подробныя выраженія проэкцій скорости w на неподвижныя и подвижныя оси координатъ.

Символическое равенство весьма удобно по своей краткости и общности, такъ какъ оно служитъ выраженіемъ проэкціи скорости w на какое угодно направленіе, подвижное или неподвижное; но мы приведемъ здѣсь подробныя выраженія для проэкцій w на оси координатъ X, $У$, Z, Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$.

Для проэкцій вращательной скорости $\mathfrak{w}$ на эти оси мы имѣемъ уже готовыя выраженія: (96) и (114), проэкціи же скорости $w_ю$ на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ выражаются трилленами:

$$x'_ю\lambda_x + y'_ю\lambda_y + z'_ю\lambda_z;\quad x'_ю\mu_x + y'_ю\mu_y + z'_ю\mu_z;\quad x'_ю\nu_x + y'_ю\nu_y + z'_ю\nu_z;$$

поэтому мы прямо пишемъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= w\cos(w,X) = x'_ю + (z - z_ю)\,Q - (y - y_ю)\,R \\
\frac{dy}{dt} &= w\cos(w,У) = y'_ю + (x - x_ю)\,R - (z - z_ю)\,P \\
\frac{dz}{dt} &= w\cos(w,Z) = z'_ю + (y - y_ю)\,P - (x - x_ю)\,Q
\end{aligned}\right\} \ldots \quad (142)$$

$$\left.\begin{aligned}
w\cos(w,\Xi) &= x'_ю\lambda_x + y'_ю\lambda_y + z'_ю\lambda_z + \zeta q - \eta r. \\
w\cos(w,\Upsilon) &= x'_ю\mu_x + y'_ю\mu_y + z'_ю\mu_z + \xi r - \zeta p \\
w\cos(w,\mathbf{Z}) &= x'_ю\nu_x + y'_ю\nu_y + z'_ю\nu_z + \eta p - \xi q
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (143)$$

II-33.

Величины P, Q, R, p, q, r выражаются въ косинусахъ λ_x, μ_x ..... ν_z и ихъ производныхъ по времени по формуламъ (95, 113) и въ углахъ $ф, ж, э$ и ихъ производныхъ по формуламъ (107—109, 119); это суть проэкціи на оси координатъ угловой скорости вращательнаго движенія тѣла вокругъ точки $Ю$; угловая скорость Ω изображается длиною, отложенною отъ точки $Ю$ по направленію мгновенной оси, какъ указано въ § 26. *Мгновенная ось есть прямая линія, проходящая черезъ точку Ю и черезъ тѣ точки тѣла, вращательныя скорости которыхъ равны нулю; полныя скорости этихъ точекъ равны и параллельны скорости $w_ю$ точки Ю.*

Если извѣстна скорость $w_ю$ точки $Ю$ и кромѣ того величина и направленіе угловой скорости Ω вращательнаго движенія тѣла вокругъ $Ю$, то можно построить, согласно съ вышесказаннымъ, величину и направленіе скорости w данной точки $\mathfrak{M}$ слѣдующимъ образомъ:

Черезъ точку $\mathfrak{M}$ и мгновенную ось $Ю\Omega$ проведемъ плоскость AB (черт. 59) и изъ точки $\mathfrak{M}$ опустимъ перпендикуляръ $\mathfrak{M}E$ на мгновенную ось; затѣмъ мы вычислимъ вращательную скорость точки $\mathfrak{M}$ вокругъ $Ю$ по формулѣ:

$$\mathfrak{w} = \Omega . \overline{\mathfrak{M}E}$$

и изобразимъ ее длиною $\mathfrak{M}B$, проведенною изъ точки $\mathfrak{M}$ перпендикулярно къ плоскости AB и притомъ въ направленіи слѣва на право для наблюдателя, стоящаго ногами въ $Ю$, головою — по направленію $Ю\Omega$, и смотрящаго на точку $\mathfrak{M}$; кромѣ того изъ точки $\mathfrak{M}$ проведемъ длину $\mathfrak{M}П$, равную и параллельную скорости $w_ю$. Построивъ на сторонахъ $\mathfrak{M}П$ и $\mathfrak{M}B$ параллелограммъ, мы проведемъ изъ точки $\mathfrak{M}$ діагональ его, которая и будетъ представлять величину и направленіе полной скорости w точки $\mathfrak{M}$.

Такъ какъ вращательныя скорости точекъ тѣла, находящихся на одной линіи параллельной мгновенной оси, равны и параллельны другъ другу, то изъ этого слѣдуетъ что:

точки твердаго тѣла, находящіяся на линіи параллельной мгновенной оси, имѣютъ равныя и параллельныя полныя скорости.

II-34.

§ 34. Перемѣна полюса вращенія твердаго тѣла.

Разсмотримъ теперь, какъ измѣнятся формулы (141), (142), (143), если мы замѣнимъ точку *Ю* другою точкою *Я* того же тѣла.

Эти формулы относятся къ разложенію движенія твердаго тѣла на вращательное движеніе вокругъ точки *Ю* и на поступательное движеніе, общее съ движеніемъ этой точки.

Мы условимся называть это разложеніе—*разложеніемъ по полюсу Ю*, подразумѣвая подъ словомъ „*полюсъ*" ту точку твердаго тѣла, вокругъ которой мы разсматриваемъ вращеніе тѣла.

Скорость $w_ю$ есть скорость поступательной части, а Ω—угловая скорость вращательной части *разложенія по полюсу Ю* полнаго движенія твердаго тѣла.

Мы можемъ *разложить* тоже самое движеніе твердаго тѣла *по другому какому либо полюсу*, за который можемъ взять произвольную точку тѣла (стр. 79), причемъ поступательная часть новаго разложенія движенія будетъ одинакова съ движеніемъ новаго полюса.

Возьмемъ за новый полюсъ точку *Я*; по формуламъ (142) мы получимъ проэкціи на оси *X*, *У*, *Z* скорости этой точки:

$$\left.\begin{aligned} x'_я &= w_я \cos(w_я X) = x'_ю + (z_я - z_ю)\,Q - (y_я - y_ю)\,R \\ y'_я &= w_я \cos(w_я У) = y'_ю + (x_я - x_ю)\,R - (z_я - z_ю)\,P \\ z'_я &= w_я \cos(w_я Z) = z'_ю + (y_я - y_ю)\,P - (x_я - x_ю)\,Q \end{aligned}\right\} ;\ . \ (144)$$

первое изъ этихъ равенствъ мы вычтемъ изъ перваго равенства (142) и т. д., получимъ слѣдующія выраженія для проэкцій скорости какой либо точки твердаго тѣла на оси *X*, *У*, *Z*:

$$\left.\begin{aligned} w \cos(w,X) &= x'_я + (z - z_я)\,Q - (y - y_я)\,R \\ w \cos(w,У) &= y'_я + (x - x_я)\,R - (z - z_я)\,P \\ w \cos(w,Z) &= z'_я + (y - y_я)\,P - (x - x_я)\,Q \end{aligned}\right\} ,\ . \ (145)$$

которыя соотвѣтствуютъ разложенію движенія тѣла по полюсу *Я* и выражаютъ, что скорость *w* какой бы то ни было точки 𝔐 твер-

даго тѣла есть геометрическая сумма скорости точки $Я$ и вращательной скорости $\mathfrak{M}$ вокругъ точки $Я$.

Поступательная часть этого разложенія движенія имѣетъ скорость $w_я$, угловая же скорость вращенія тѣла вокругъ полюса $Я$ равна и параллельна угловой скорости вращенія вокругъ точки $Ю$, такъ что мгновенная ось параллельна прежней.

Мы сдѣлаемъ теперь перечень того, что мы узнали о разложеніи движенія и скоростей точекъ твердаго тѣла.

Всякое непоступательное движеніе твердаго тѣла можетъ быть разложено на вращательное движеніе вокругъ которой либо точки тѣла, которую мы примемъ за полюсъ вращенія, и на поступательное движеніе представляемое движеніемъ этого полюса.

Такъ какъ за полюсъ можетъ быть взята всякая точка тѣла, то разложенія одного и того же движенія тѣла многообразны до безконечности.

Скорость каждой точки тѣла есть геометрическая сумма вращательной скорости этой точки вокругъ полюса вращенія и скорости послѣдняго.

Угловыя скорости тѣла вокругъ всѣхъ полюсовъ равны, и мгновенныя оси, проходящія черезъ всѣ полюсы, параллельны другъ другу; такъ что вращенія тѣла вокругъ различныхъ полюсовъ тождественны въ томъ смыслѣ, что линіи, проведенныя въ тѣлѣ параллельно другъ другу черезъ различныя точки тѣла, измѣняютъ свое направленіе въ пространствѣ одинаковымъ образомъ.

Величина и направленіе вращательной скорости какой либо точки твердаго тѣла вокругъ какого либо полюса опредѣляется, какъ показано въ § 25 (стр. 89 и 90, черт. 42) величиною угловой скорости, направленіемъ мгновенной оси проведенной черезъ полюсъ и разстояніемъ точки отъ мгновенной оси; вращательныя скорости одной и той же точки тѣла вокругъ различныхъ полюсовъ различны (если полюсы не лежатъ на

II-34,35

одной мгновенной оси), хотя угловыя скорости тѣла вокругъ разныхъ полюсовъ одинаковы, а мгновенныя оси параллельны.

§ 35. Центральная или винтовая мгновенная ось.

Полюсъ вращенія можетъ быть помѣщенъ въ любой точкѣ твердаго тѣла, но если оно вращается вокругъ неподвижной точки и полюсъ помѣщенъ въ послѣдней, то формулы (141), (142), (143) пріобрѣтаютъ простѣйшій видъ, чѣмъ при помѣщеніи полюса въ другихъ точкахъ твердаго тѣла. Чтобы дать сразу точное и наглядное представленіе о величинѣ и направленіи одновременныхъ скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла, движущагося подобнымъ образомъ, мы можемъ выразиться такъ:

Если мы знаемъ величину угловой скорости и направленіе мгновенной оси въ какой либо мементъ движенія тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, то, чтобы опредѣлить направленія и величины скоростей точекъ тѣла въ этотъ моментъ, мы должны разсуждать такимъ же образомъ, какъ если бы тѣло вращалось *равномѣрно* съ этою угловою скоростью вокругъ неподвижной оси, проходящей черезъ неподвижную точку и совпадающей съ этою мгновенною осью.

Если движеніе тѣла такое, что нѣтъ точекъ, скорости которыхъ были бы равны нулю, то всегда можно найти такую линію въ тѣлѣ, скорости точекъ которой имѣютъ наименьшую величину сравнительно съ одновременными имъ скоростями всѣхъ прочихъ точекъ тѣла.

Для того чтобы найти абсолютныя координаты такихъ точекъ, мы должны приравнять нулю производныя по x, y и z отъ слѣдующаго выраженія:

$$w^2 = (x'_{ю} + (z - z_{ю})\,Q - (y - y_{ю})\,R)^2 +$$
$$+ (y'_{ю} + (x - x_{ю})R - (z - z_{ю})\,P)^2 +$$
$$+ (z'_{ю} + (y - y_{ю})\,P - (x - x_{ю})\,Q)^2;$$

получимъ слѣдующія равенства:

$$\frac{x'_{ю} + (z_{\text{в}} - z_{ю})Q - (y_{\text{в}} - y_{ю})\,R}{P} = \frac{y'_{ю} + (x_{\text{в}} - x_{ю})\,R - (z_{\text{в}} - z_{ю})\,P}{Q} =$$
$$= \frac{z'_{ю} + (y_{\text{в}} - y_{ю})\,P - (x_{\text{в}} - x_{ю})\,Q}{R} \ldots\ldots \quad (146)$$

II-35.

координаты точек центральной оси

Здѣсь $x_{в}, y_{в}, z_{в}$ суть абсолютныя координаты точекъ твердаго тѣла, имѣющихъ наименьшія скорости; скорости эти дѣйствительно наименьшія, а не наибольшія, такъ какъ мы, представляя себѣ размѣры твердаго тѣла неограниченными, можемъ найти въ немъ точки, обладающія произвольно-большими скоростями.

Равенства (146) суть уравненія прямой линіи, на которой находятся точки съ наименьшими скоростями: эти равенства могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{w_{в}\cos(w_{в}X)}{P}=\frac{w_{в}\cos(w_{в}Y)}{Q}=\frac{w_{в}\cos(w_{в}Z)}{R}, \quad \ldots \quad (147)$$

гдѣ $w_{в}$ есть скорость одной изъ точекъ разсматриваемой линіи.

Равенства (147) выражаютъ, что проэкціи на оси X, Y, Z наименьшей скорости $w_{в}$ пропорціональны проэкціямъ угловой скорости на тѣже оси, то есть, что скорость $w_{в}$ параллельна угловой скорости.

Линія (146) параллельна направленію угловой скорости; это видно, какъ изъ самыхъ уравненій (146), такъ и изъ того обстоятельства, что точки твердаго тѣла, находящіяся на линіи параллельной направленію угловой скорости, имѣютъ равныя и параллельныя полныя скорости.

Слѣдовательно линія (146) параллельна угловой скорости, т. е. есть одна изъ мгновенныхъ осей твердаго тѣла, и скорости точекъ ея направлены вдоль по ней.

Эта мгновенная ось называется *центральною мгновенною осью* или мгновенною осью вращенія и скольженія.

Положеніе центральной оси, какъ въ пространствѣ, такъ и внутри тѣла измѣняется въ каждое мгновеніе; но мы представимъ себѣ на время такое движеніе тѣла, въ которомъ положеніе и направленіе центральной оси остаются неизмѣнными; такое движеніе тѣла называется *винтовымъ движеніемъ*, такъ какъ оно состоитъ изъ вращательнаго движенія вокругъ нѣкоторой оси, соединеннаго съ поступательнымъ движеніемъ параллельно той же оси.

Если притомъ скорость поступательнаго движенія и угловая скорость вращательнаго движенія постоянны, то винтовое движеніе

II-55.

называется *равномѣрнымъ винтовымъ движеніемъ*; таково, напримѣръ, слѣдующее движеніе твердаго тѣла:

$$x_{ю} = 0,\ y_{ю} = 0,\ z_{ю} = at;\ ф = 0,\ ж = 0,\ э = \omega t.$$

Въ этомъ движеніи угловая скорость имѣетъ постоянную величину ω, и направленіе ея совпадаетъ съ осью Z, которая есть вмѣстѣ съ тѣмъ центральная ось во время всего движенія; поступательное движеніе равномѣрно и скорость его равна a.

Очевидно, что траэкторіи всѣхъ точекъ тѣла въ этомъ движеніи суть винтовыя линіи, такія, какъ указано въ примѣрѣ 7-мъ (стр. 12); всѣ они имѣютъ равный шагъ винта h, измѣняемый длиною, проходимою точкою $Ю$ въ теченіи того времени T, въ которое тѣло совершитъ полный оборотъ вокругъ оси; такъ что:

$$T = \frac{2\pi}{\omega};\ h = aT = 2\pi\frac{a}{\omega}.$$

Если винтовое движеніе неравномѣрно, но отношеніе между скоростью поступательнаго движенія параллельно центральной оси и угловою скоростью постоянно, то траэкторіи всѣхъ точекъ тѣла суть также правильныя винтовыя линіи равнаго шага; длина шага равняется помноженному на 2π отношенію поступательной скорости къ угловой скорости; такое движеніе твердаго тѣла мы условимся называть *правильнымъ винтовымъ движеніемъ*.

Чтобы получить величину и направленіе скорости какой либо точки $\mathfrak{M}$ (черт. 60) твердаго тѣла въ правильномъ винтовомъ движеніи его, надо построить параллелограммъ на поступательной скорости $\mathfrak{M}П_{в}$, равной и параллельной скорости точекъ центральной оси, и на вращательной скорости $\mathfrak{M}B$ точки $\mathfrak{M}$ вокругъ этой оси; послѣдняя равна $\Omega\,.\,\overline{\mathfrak{M}E}$ (гдѣ $\overline{\mathfrak{M}E}$ есть перпендикуляръ опущенный изъ $\mathfrak{M}$ на центральную ось) и перпендикулярна къ $\overline{\mathfrak{M}E}$ и къ центральной оси; діагональ $\overline{\mathfrak{M}W}$ параллелограмма будетъ представлять величину и направленіе скорости точки $\mathfrak{M}$. Такъ какъ плоскость параллелограмма перпендикулярна къ линіи $\overline{\mathfrak{M}E}$, то ско-

II - 35.

рость точки $\mathfrak{M}$ также перпендикулярна къ этой линіи; такъ какъ параллелограммъ прямоугольный, то проэкція скорости $\overline{\mathfrak{M}W}$ на направленіе центральной оси равна поступательной скорости $\overline{\mathfrak{M}\Pi_e}$; тангенсъ угла, составляемаго скоростью $\overline{\mathfrak{M}W}$ съ плоскостью перпендикулярною къ центральной оси, равняется дѣленному на 2π отношенію шага винтовыхъ траэкторій къ разстоянію $\mathfrak{M}E$, потому что:

$$\operatorname{tg} W\mathfrak{M}B = \frac{\mathfrak{M}\Pi_e}{\mathfrak{M}B} = \frac{w_e}{\Omega(\mathfrak{M}E)} = \frac{1}{2\pi}\frac{h}{(\mathfrak{M}E)}.$$

Очевидно, что то же самое построеніе надо примѣнить для полученія величины и направленія скорости какой либо точки твердаго тѣла въ какомъ бы то ни было движеніи; надо только знать положеніе центральной оси для разсматриваемаго мгновенія, величину угловой скорости Ω и величину скорости w_e точки, находящейся на центральной оси; поэтому мы можемъ дать точное и наглядное понятіе о величинахъ и направленіяхъ одновременныхъ скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла, движущагося какимъ бы то ни было образомъ, если выразимся такъ:

Если, въ какой либо моментъ движенія твердаго тѣла, мы знаемъ положеніе центральной оси, величину скоростей w_e точекъ ея и величину Ω угловой скорости, то, чтобы опредѣлить направленія и величины скоростей точекъ тѣла въ этотъ моментъ, слѣдуетъ разсуждать такимъ же образомъ, какъ если бы тѣло имѣло равномѣрное винтовое движеніе вокругъ этой центральной оси съ этою скоростью Ω и съ винтовымъ шагомъ: $h = 2\pi\frac{w_e}{\Omega}$.

Вслѣдствіе этого центральную ось называютъ иногда *винтовою мгновенною осью*.

Мы подчеркнемъ здѣсь нѣкоторыя изъ свойствъ скоростей точекъ твердаго тѣла.

Проэкціи, на направленіе угловой скорости, скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла имѣютъ общую величину, равную величинѣ скоростей точекъ центральной оси; то есть:

$$w\cos(w\Omega) = w_ю \cos(w_ю\Omega) = w_e \ldots\ldots \quad (148)$$

Ц-35

Если через какую либо точку тѣла мы проведемъ плоскость, заключающую скорость этой точки и притомъ параллельную мгновеной оси, а затѣмъ другую плоскость, перпендикулярную къ первой и также параллельную ко мгновенной оси, то послѣдняя плоскость пройдетъ черезъ центральную ось.

На основаніи этихъ свойствъ скоростей, можно построить направленіе и положеніе центральной оси, зная величины и направленія скоростей трехъ точекъ твердаго тѣла.

Построеніе это, предложенное Понселе, заключается въ слѣдующемъ: пусть $\overline{\mathfrak{M}_1 W_1}$, $\overline{\mathfrak{M}_2 W_2}$, $\overline{\mathfrak{M}_3 W_3}$ (черт. 61) суть скорости трехъ точекъ $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ твердаго тѣла; проведемъ длины равныя и параллельныя этимъ скоростямъ изъ какой либо точки (на чертежѣ 61 изъ точки $\mathfrak{M}_3$ проведены: $\mathfrak{M}_3 A_1$, параллельная и равная $\overline{\mathfrak{M}_1 W_1}$, и $\overline{\mathfrak{M}_3 A_2}$, параллельная и равная $\overline{\mathfrak{M}_2 W_2}$) черезъ концы этихъ длинъ проведемъ плоскость (на чертежѣ это есть плоскость, проходящая черезъ точки W_3, A_1, A_2) и на эту плоскость изъ той точки, откуда отложены проведенныя длины, опустимъ перпендикуляръ $(\mathfrak{M}_3 J)$; направленіе этого перпендикуляра будетъ параллельно центральной оси, а длина его будетъ изображать величину скоростей точекъ центральной оси; величины и направленія длинъ $\overline{JA_1}$, $\overline{JA_2}$, $\overline{JW_3}$ будутъ представлять вращательныя, вокругъ центральной оси, скорости точекъ $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$.

Чтобы построить положеніе центральной оси, мы проведемъ изъ точки W_1 длину $\overline{W_1 \Pi_1}$, равную и параллельную длинѣ $A_1 J$, и изъ т чки W_2 длину $\overline{W_2 \Pi_2}$, равную и параллельную длинѣ $A_2 J$; затѣмъ черезъ точки $\mathfrak{M}_1$ и Π_1 проведемъ плоскость P_1. перпендикулярную къ $\overline{\Pi_1 W_1}$ и черезъ точки $\mathfrak{M}_2$ и Π_2 плоскость P_2, перпендикулярную къ $\overline{\Pi_2 W_2}$; линія пересѣченія плоскостей P_1 и P_2 будетъ центральная ось *ЦЦ*.

Для того, чтобы еще лучше уяснить законъ, которому слѣдуютъ величины и направленія одновременныхъ скоростей точекъ твердаго тѣла, мы сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе:

Представимъ себѣ круговую цилиндрическую поверхность, ось которой совпадаетъ съ центральною осью; всѣ точки твердаго тѣла, находящіяся на этой поверхности, имѣютъ скорости равныя, касательныя къ поверхности и составляющія равные углы съ производящими или съ осью поверхности; чѣмъ болѣе радіусъ цилин-

II-35.36.

дрической поверхности, тѣмъ больше величины скоростей и тѣмъ ближе къ прямому уголъ, составляемый ими съ осью.

§ 36 А. Опредѣленіе положенія центральной оси.

Такъ какъ скорость w_e направлена вдоль по угловой скорости, то отношенія:

$$\frac{w_e \cos(w_e X)}{P}, \quad \frac{w_e \cos(w_e Y)}{Q}, \quad \frac{w_e \cos(w_e Z)}{R}$$

равны отношенію: (см. 148)

$$\frac{w_e}{\Omega} = \frac{\Omega w_e}{\Omega^2}; = \frac{\Omega . w'_{ю} . \cos(W_{ю}, \Omega)}{\Omega^2} \qquad (148\,a)$$

на основаніи же равенства (148), послѣднее можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{\Omega w_{ю} \cos(w_{ю}\Omega)}{\Omega^2} = \frac{Px'_{ю} + Qy'_{ю} + Rz'_{ю}}{P^2+Q^2+R^2}.$$

На этомъ основаніи мы можемъ представить равенства (146) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x'_{ю} + \bar{z}Q - \bar{y}R}{P} &= \frac{Px'_{ю} + Qy'_{ю} + Rz'_{ю}}{P^2+Q^2+R^2} \\
\frac{y'_{ю} + \bar{x}R - \bar{z}P}{Q} &= \frac{Px'_{ю} + Qy'_{ю} + Rz'_{ю}}{P^2+Q^2+R^2} \\
\frac{z'_{ю} + \bar{y}P - \bar{x}Q}{R} &= \frac{Px'_{ю} + Qy'_{ю} + Rz'_{ю}}{P^2+Q^2+R^2}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (149)$$

гдѣ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ означаютъ разности $x_e - x_{ю}$, $y_e - y_{ю}$, $z_e - z_{ю}$. Одно изъ этихъ трехъ равенствъ есть слѣдствіе двухъ остальныхъ.

Первое изъ равенствъ (149) мы передѣлаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\bar{z}Q - \bar{y}R = \frac{P^2x'_{ю} + PQy'_{ю} + PRz'_{ю} - (P^2x'_{ю} + Q^2x'_{ю} + R^2x'_{ю})}{\Omega^2} =$$

$$= \frac{Q(Py'_{ю} - Qx'_{ю}) - R(Rx'_{ю} - Pz'_{ю})}{\Omega^2},$$

или

$$\left[\bar{z} - \frac{(Py'_{ю} - Qx'_{ю})}{\Omega^2}\right]\frac{1}{R} = \left[\bar{y} - \frac{(Rx'_{ю} - Pz'_{ю})}{\Omega^2}\right]\frac{1}{Q}.$$

II-36.

Подобнымъ же образомъ мы передѣлаемъ также и второе изъ равенствъ (149); получимъ уравненія центральной оси въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x_в - x_ц}{P} = \frac{y_в - y_ц}{Q} = \frac{z_в - z_ц}{R}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

гдѣ:

$$\left. \begin{aligned} x_ц &= x_ю + \frac{(z'_ю Q - y'_ю R)}{\Omega^2} \\ y_ц &= y_ю + \frac{(x'_ю R - z'_ю P)}{\Omega^2} \\ z_ц &= z_ю + \frac{(y'_ю P - x'_ю Q)}{\Omega^2} \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots (151)$$

Б. Уравненія (150) выражаютъ, что центральная ось параллельна угловой скорости и проходитъ черезъ точку, абсолютныя координаты которой суть $x_ц$, $y_ц$, $z_ц$; мы будемъ называть эту точку—точкою *Ц*.

Равенства (151) показываютъ, что разности между абсолютными координатами точекъ *Ц* и *Ю* выражаются формулами подобными тѣмъ, которыя выражаютъ проэкціи вращательной скорости вокругъ точки *Ю* (см. форм. 96, стр. 85); если въ формулахъ (96) замѣнить:

$$x - x_ю \text{ черезъ } \frac{x'_ю}{\Omega^2}, \; y - y_ю \text{ черезъ } \frac{y'_ю}{\Omega^2} \text{ и } z - z_ю \text{ черезъ } \frac{z'_ю}{\Omega^2},$$

то получатся разсматриваемыя нами теперь выраженія разностей: $x_ц - x_ю$, $y_ц - y_ю$, $z_ц - z_ю$; изъ этого слѣдуетъ, что длина $\overline{ЮЦ}$ имѣетъ такое же направленіе относительно угловой скорости $\overline{Ю\Omega}$ (см. черт. 62) и длины $\overline{ЮП}$, представляющей величину и направленіе скорости $w_ю$ точки *Ю*, какое имѣетъ вращательная вокругъ точки *Ю* скорость какой либо точки $\mathfrak{M}$ относительно угловой скорости $\overline{Ю\Omega}$ и радіуса вектора $\overline{Ю\mathfrak{M}}$ этой точки; разница только въ томъ, что вращательная скорость откладывалась отъ точки $\mathfrak{M}$, длина же $\overline{ЮЦ}$ откладывается отъ точки *Ю*.

Слѣдуя правилу, приведенному въ § 26 (стр. 91), относительно вращательной скорости, мы скажемъ, что $\overline{ЮЦ}$ *направлено вправо*

относительно наблюдателя, стоящаго ногами въ Ю, головою по направленію мгновенной оси и смотрящаго на точку П.

Величина же разстоянія $\overline{ЮЦ}$ получится изъ формулы (99), выражающей величину вращательной скорости, если замѣнить въ ней: направленіе r радіуса вектора $\overline{ЮМ}$ направленіемъ скорости $w_ю$ ($\overline{ЮП}$ на чертежѣ 62), а величину r радіуса вектора—величиною $\frac{w_ю}{\Omega^2}$; поэтому:

$$\overline{ЮЦ} = \frac{w_ю \sin(w_ю \Omega)}{\Omega}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (152)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для опредѣленія положенія точки $Ц$ должно сдѣлать слѣдующее:

Изъ точки Ю надо возстановить перпендикуляръ къ плоскости $ПЮ\Omega$ (черт. 62) въ такомъ направленіи, съ котораго $\overline{Ю\Omega}$ видно по лѣвую, а $\overline{ЮП}$ по правую руку; на этомъ направленіи надо отложить длину $\overline{ЮЦ}$, равную дѣленной на Ω проэкціи скорости $w_ю$ на плоскость, перпендикулярную къ направленію угловой скорости; центральная ось $\overline{Ц\Omega^0}$ будетъ параллельна $Ю\Omega$; скорости точекъ ея будутъ равны $\overline{ЦП^0} = w_ю \cos(w_ю \Omega)$.

Равенства (146), или (149), или (150), суть уравненія центральной оси въ абсолютныхъ координатахъ; они выражаютъ положеніе ея въ пространствѣ. Мы составимъ теперь уравненія этой оси въ относительныхъ координатахъ, выражающія положеніе ея въ самомъ твердомъ тѣлѣ.

Такъ какъ центральная ось проходитъ черезъ точку $Ц$ и параллельна угловой скорости, то мы можемъ прямо написать уравненія ея:

$$\frac{\xi - \xi_ц}{p} = \frac{\eta - \eta_ц}{q} = \frac{\zeta - \zeta_ц}{r}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (153)$$

гдѣ ξ, η, ζ означаютъ относительныя координаты какой либо точки центральной оси, $\xi_ц, \eta_ц, \zeta_ц$—координаты точки $Ц$.

Относительныя координаты $\xi_ц, \eta_ц, \zeta_ц$ мы опредѣлимъ по абсолютнымъ координатамъ $x_ц y_ц z_ц$ при помощи формулъ (46) стр. 56; если

II-36.

же выразимъ, по формуламъ (60), каждый изъ косинусовъ $\lambda_x \lambda_y \ldots \nu_z$, въ четырехъ другихъ изъ числа ихъ, то получимъ слѣдующія выраженія для относительныхъ координатъ точки *Ц*; напримѣръ:

$$\xi_{ц} = \frac{1}{\Omega^2}\Big\{(Qz'_{ю}-Ry'_{ю})(\mu_y\nu_z-\mu_z\nu_y)+(Rx'_{ю}-Pz'_{ю})(\mu_z\nu_x-\mu_x\nu_z)+$$
$$+(Py'_{ю}-Qx'_{ю})(\mu_x\nu_y-\mu_y\nu_x).$$

Этому выраженію можно придать болѣе сжатый видъ при помощи слѣдующаго преобразованія:

Каждая сумма вида:

$$(Bc-Cb)(B_1c_1-C_1b_1)+(Ca-Ac)(C_1a_1-A_1c_1)+$$
$$+(Ab-Ba)(A_1b_1-B_1a_1),$$

составленная изъ двѣнадцати величинъ:

$$A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c$$
$$A_1,\ B_1,\ C_1\ a_1,\ b_1,\ c_1,$$

можетъ быть написана слѣдующимъ образомъ:

$$\left[\begin{array}{lll} & +BB_1aa_1 & +CC_1aa_1 \\ AA_1bb_1 & & +CC_1bb_1 \\ AA_1cc_1 & +BB_1cc_1 & \end{array}\right]-\left[\begin{array}{lll} & +Bb_1A_1a & +Cc_1A_1a \\ Aa_1B_1b & & +Cc_1B_1b \\ Aa_1C_1c & +Bb_1C_1c & \end{array}\right];$$

если прибавимъ и вычтемъ недостающія произведенія:

$$AA_1aa_1=Aa_1A_1a;\ BB_1bb_1=Bb_1B_1b;\ CC_1cc_1=Cc_1C_1c,$$

то получимъ:

$$(AA_1+BB_1+CC_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-$$
$$-(Aa_1+Bb_1+Cc_1)(A_1a+B_1b+C_1c).$$

Полученная нами формула:

П-36.

$$(Bc - Cb)\ (B_1c_1 - C_1b_1) + (Ca - Ac)\ (C_1a_1 - A_1c_1) +$$
$$+ (Ab - Ba)\ (A_1b_1 - B_1a_1) =$$
$$= (AA_1 + BB_1 + CC_1)\ (aa_1 + bb_1 + cc_1) -$$
$$- (Aa_1 + Bb_1 + Cc_1)\ (A_1a + B_1b + C_1c) \ldots (154)$$

пригодится намъ при многихъ преобразованіяхъ.

Примѣнивъ эту формулу къ преобразованію выраженія для $\xi_{\text{ц}}$, мы получимъ:

$$\xi_{\text{ц}}\Omega^2 = (P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z)\ (x'_{\text{ю}}\nu_x + y'_{\text{ю}}\nu_y + z'_{\text{ю}}\nu_z) -$$
$$- (P\nu_x + Q\nu_y + R\nu_z)\ (x'_{\text{ю}}\mu_x + y'_{\text{ю}}\mu_y + z'_{\text{ю}}\mu_z).$$

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія выраженія для относительныхъ координатъ точки *Ц*:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{\text{ц}} &= \frac{q w_{\text{ю}} \cos(w_{\text{ю}} Z) - r w_{\text{ю}} \cos(w_{\text{ю}} \Upsilon)}{\Omega^2} \\ \eta_{\text{ц}} &= \frac{r w_{\text{ю}} \cos(w_{\text{ю}} \Xi) - p w_{\text{ю}} \cos(w_{\text{ю}} Z)}{\Omega^2} \\ \xi_{\text{ц}} &= \frac{p w_{\text{ю}} \cos(w_{\text{ю}} \Upsilon) - q w_{\text{ю}} \cos(w_{\text{ю}} \Xi)}{\Omega^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (155)$$

По формуламъ (150), (151), (153), (155) мы опредѣлимъ положеніе центральной оси въ пространствѣ и въ твердомъ тѣлѣ для каждаго момента движенія твердаго тѣла, если $x_{\text{ю}}, y_{\text{ю}}, z_{\text{ю}}$, *ф*, *ж*, *э* даны въ функціяхъ времени.

Примѣръ 17-й.

$$x_{\text{ю}} = A\cos\omega t,\ \ y_{\text{ю}} = A\sin\omega t,\ \ z_{\text{ю}} = 0$$

$$ф = \alpha;\ \ ж = \frac{\pi}{2} + \omega t,\ \ э = \omega_1 t.$$

Чтобы получить понятіе о движеніи твердаго тѣла, выражаемомъ этими равенствами, мы представивъ себѣ три, неизмѣнно связанныя одна съ другою, линіи: *OZ*, *OЮ* и *ЮZ* (черт. 63); онѣ связаны одна съ другою

такимъ образомъ, что постоянная длина $OЮ$ есть кратчайшее разстояніе между линіями OZ и $ЮZ$ и что уголъ, образуемый этими послѣдними, или равный ему уголъ $ZЮZ'$, сохраняетъ постоянную величину; предположимъ, что неизмѣняемая система, образуемая этими линіями, вращается равномѣрно съ угловою скоростью ω вокругъ оси OZ въ сторону, указанную неоперенною стрѣлкою, а въ тоже время нѣкоторое твердое тѣло, надѣтое на ось $ЮZ$, вращается вокругъ нея равномѣрно, съ угловою скоростью, ω_1, въ сторону, означенную оперенною стрѣлкою; тогда это твердое тѣло и будетъ совершать движеніе, разсматриваемое въ этомъ примѣрѣ.

Между прочимъ замѣтимъ, что ось $ЮZ$ описываетъ въ пространствѣ однополый гиперболоидъ вращенія вокругъ оси OZ; шейка этого гиперболоида есть кругъ, описываемый точкою $Ю$, а уголъ, образуемый съ осью Z производящими ассимптотической конической поверхности, равняется α.

По имѣющимся у насъ формуламъ, мы найдемъ слѣдующія выраженія абсолютныхъ координатъ точки $Ц$:

$$x_ц = A\cos\omega t\,\frac{\omega_1 r}{\Omega^2} = \frac{\omega_1 r}{\Omega^2}\,x_ю,$$

$$y_ц = A\sin\omega t\,\frac{\omega_1 r}{\Omega^2} = \frac{\omega_1 r}{\Omega^2}\,y_ю.$$

$$z_ц = 0;\ r = \omega\cos\alpha + \omega_1,\ \Omega^2 = \omega^2 + 2\omega\omega_1\cos\alpha + \omega_1^2.$$

Эти выраженія показываютъ, что точка $Ц$ находится на линіи $OЮ$ въ разстояніи равномъ:

$$D = A\,\frac{\omega_1}{\Omega}\,\frac{r}{\Omega}$$

отъ точки O; такъ какъ ω_1 и r меньше Ω, то D меньше A.

Такъ какъ радіусъ векторъ $\overline{OЮ}$ вращается вокругъ точки O въ плоскости XY, то вмѣстѣ съ нимъ измѣняетъ свое положеніе и точка $Ц$, описывая на той же плоскости окружность радіуса D; вмѣстѣ съ точкою $Ц$ измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ центральная ось, какъ показываютъ уравненія ея въ абсолютныхъ координатахъ:

$$-\frac{x - D\cos\omega t}{\omega_1\sin\alpha\sin\omega t} = \frac{y - D\sin\omega t}{\omega_1\sin\alpha\cos\omega t} = \frac{z}{R},$$

гдѣ

$$R = \omega_1\cos\alpha + \omega.$$

II-36.

Геометрическое мѣсто положеній центральной оси въ пространствѣ есть *линейчатая поверхность*, уравненіе которой получится по исключеніи времени изъ предыдущихъ уравненій; уравненіе это:

$$x^2 + y^2 = D^2 + z^2 \left(\frac{\omega_1 \sin \alpha}{R}\right)^2$$

мы представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x^2 + y^2}{D^2} - \frac{z^2}{D^2 \operatorname{cotg}^2 \vartheta} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

гдѣ:

$$\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{R}{\omega_1 \sin \alpha}.$$

Это есть однополый гиперболоидъ вращенія вокругъ оси Z, шейка котораго есть кругъ радіуса D, находящійся въ плоскости XY, а производящія ассимптотическаго конуса составляютъ съ осью Z уголъ ϑ.

Относительныя координаты точки $Ц$:

$$\xi_ц = A\frac{\omega R}{\Omega^2} \sin \omega_1 t = (A - D) \sin \omega_1 t$$

$$\eta_ц = A\frac{\omega R}{\Omega^2} \cos \omega_1 t = (A - D) \cos \omega_1 t$$

$$\zeta_ц = 0$$

выражаютъ, что эта точка измѣняетъ свое положеніе и въ твердомъ тѣлѣ: она описываетъ на плоскости $\Xi\Upsilon$ окружность, вокругъ точки $Ю$, радіуса равнаго $(A - D)$; вмѣстѣ съ нею и центральная ось измѣняетъ свое положеніе въ тѣлѣ, какъ показываютъ уравненія ея въ относительныхъ координатахъ:

$$-\frac{\xi - (A - D) \sin \omega_1 t}{\omega \sin \alpha \cos \omega_1 t} = \frac{\eta - (A - D) \cos \omega_1 t}{\omega \sin \alpha \sin \omega_1 t} = \frac{\zeta}{r}.$$

Геометрическое мѣсто положеній центральной оси въ твердомъ тѣлѣ есть другая линейчатая поверхность, а именно однополый гиперболоидъ вращенія вокругъ оси Z, уравненіе котораго есть:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{(A - D)^2} - \frac{\zeta^2}{(A - D)^2 \operatorname{cotg}^2 \vartheta_1} = 1, \quad \ldots\ldots \quad (157)$$

гдѣ:

$$\operatorname{cotg} \vartheta_1 = \frac{r}{\omega \sin \alpha}.$$

II-36-37.

Мы еще вернемся къ этому примѣру, теперь же пока замѣтимъ, что непересѣкающія полуоси обоихъ гиперболоидовъ равны другъ другу; въ самомъ дѣлѣ:

$$D \cot g\, \vartheta = A \frac{\omega_1 r}{\Omega^2} \frac{R}{\omega_1 \sin\alpha} = A \frac{\omega R}{\Omega^2} \frac{r}{\omega \sin\alpha} = (A - D) \cot g\, \vartheta_1.$$

§ 37. Аксоиды центральныхъ осей.

Вообще говоря, центральная ось измѣняетъ свое положеніе, какъ въ пространствѣ, такъ и по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу.

Если измѣненіе положенія происходитъ послѣдовательнымъ и непрерывнымъ образомъ, то геометрическое мѣсто положеній центральной оси въ пространствѣ будетъ нѣкоторая *линейчатая поверхность,* которая, по роду ея образованія, называется *неподвижнымъ аксоидомъ центральныхъ осей;* уравненіе этого аксоида получится по исключеніи времени изъ уравненій (150).

Геометрическое мѣсто положеній центральной оси въ движущемся твердомъ тѣлѣ есть нѣкоторая другая линейчатая поверхность, называемая *подвижнымъ аксоидомъ центральныхъ осей*; уравненіе его получится по исключеніи времени изъ уравненій (153).

Первый аксоидъ неподвиженъ въ пространствѣ, второй неизмѣнно связанъ съ твердымъ тѣломъ и движется вмѣстѣ съ нимъ.

Изъ самаго опредѣленія аксоидовъ слѣдуетъ:

A) *что въ каждое мгновеніе подвижный аксоидъ имѣетъ общую производящую съ аксоидомъ неподвижнымъ,*

B) *что скорости всѣхъ тѣхъ точекъ подвижнаго аксоида, которыя находятся на общей обоимъ аксоидамъ производящей, направлены по производящей и равны.*

Вмѣстѣ съ измѣненіемъ положенія центральной оси измѣняется также и положеніе точки *Ц*, какъ въ пространствѣ, такъ и въ твердомъ тѣлѣ; геометрическое мѣсто положеній точекъ *Ц* въ пространствѣ есть неподвижная кривая линія, находящаяся на поверхности неподвижнаго аксоида; геометрическое же мѣсто поло-

II-37.

женій точекъ $Ц$ въ твердомъ тѣлѣ есть кривая линія, находящаяся на поверхности аксоида подвижнаго.

Въ каждое мгновеніе кривая $Ц' \, Ц'' \, Ц''' \dots$, находящаяся на подвижномъ аксоидѣ, имѣетъ общую точку съ кривою $Ц_1 \, Ц_2 \, Ц_3 \dots$, находящеюся на неподвижномъ аксоидѣ (понятно, что общая точка находится на общей производящей обоихъ аксоидовъ).

Мы сейчасъ докажемъ, что въ этой общей точкѣ обѣ кривыя составляютъ конечный уголъ одна съ другою.

Пусть $x_ц \, y_ц \, z_ц$ — абсолютныя, а $\xi_ц \, \eta_ц \, \zeta_ц$ — относительныя координаты точки, общей обѣимъ кривымъ въ моментъ t; въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt общая точка перемѣстится: по неподвижной кривой—на безконечно-малую длину ds ея дуги, а по подвижной кривой—на безконечно-малую длину $d\sigma$ ея дуги; проэкціи первой длины на оси координатъ X, $У$, Z равны приращеніямъ, получаемымъ координатами $x_ц \, y_ц \, z_ц$ въ теченіи безк. малаго промежутка времени dt; проэкціи второй длины на оси координатъ Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равны приращеніямъ, получаемымъ въ теченіи того же промежутка времени координатами $\xi_ц$, $\eta_ц$, $\zeta_ц$. Означимъ черезъ k и $\varkappa$ направленія касательныхъ, проведенныхъ изъ общей точки къ кривымъ: неподвижной и подвижной. Согласно сказанному, будетъ:

$$dx_ц = \frac{dx_ц}{dt} dt = ds \cos(kX); \quad d\xi_ц = \frac{d\xi_ц}{dt} dt = d\sigma \cos(\varkappa\Xi)$$

$$dy_ц = \frac{dy_ц}{dt} dt = ds \cos(kУ); \quad d\eta_ц = \frac{d\eta_ц}{dt} dt = d\sigma \cos(\varkappa\Upsilon)$$

$$dz_ц = \frac{dz_ц}{dt} dt = ds \cos(kZ); \quad d\zeta_ц = \frac{d\zeta_ц}{dt} dt = d\sigma \cos(\varkappa\mathbf{Z})$$

косинусы же угловъ, составляемыхъ направленіемъ $\varkappa$ съ неподвижными осями, выражаются формулами:

$$\cos(\varkappa X) = \frac{d\xi_ц}{d\sigma}\lambda_x + \frac{d\eta_ц}{d\sigma}\mu_x + \frac{d\zeta_ц}{d\sigma}\nu_x$$

$$\cos(\varkappa У) = \frac{d\xi_ц}{d\sigma}\lambda_y + \frac{d\eta_ц}{d\sigma}\mu_y + \frac{d\zeta_ц}{d\sigma}\nu_y$$

$$\cos(\varkappa Z) = \frac{d\xi_ц}{d\sigma}\lambda_z + \frac{d\eta_ц}{d\sigma}\mu_z + \frac{d\zeta_ц}{d\sigma}\nu_z.$$

II - 37.

Чтобы опредѣлить зависимость между косинусами угловъ, составленныхъ направленіями k и $\varkappa$ съ каждою изъ неподвижныхъ осей координатъ, мы возьмемъ уравненія 45 (стр. 56), выражающія координаты $x_ц\, y_ц\, z_ц$ въ координатахъ $\xi_ц\, \eta_ц\, \zeta_ц$ и возьмемъ производныя отъ нихъ по t; получимъ три уравненія, первое изъ которыхъ слѣдующее:

$$\frac{dx_ц}{dt} = \left[\frac{dx_ю}{dt} + \xi_ц\lambda'_x + \eta_ц\mu'_x + \zeta_ц\nu'_x\right] + \frac{d\xi_ц}{dt}\lambda_x + \frac{d\eta_ц}{dt}\mu_x + \frac{d\zeta_ц}{dt}\nu_x,$$

или:

$$ds\cos(kX) = (x'_ю + \xi_ц\lambda'_x + \eta_ц\mu'_x + \zeta_ц\nu'_x)\,dt + d\sigma\cos(\varkappa X);$$

сумма, помноженная на dt и находящаяся во второй части этого равенства, равняется проэкціи на ось X скорости той точки твердаго тѣла, въ которой находится точка $Ц$; эта сумма равна $w_ц\cos(w_ц X) = w_ц\cos(\Omega X)$.

Поступая такимъ образомъ, мы получимъ три слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} ds\cos(kX) &= d\sigma\cos(\varkappa X) + w_ц dt\cos(\Omega X)\\ ds\cos(kY) &= d\sigma\cos(\varkappa Y) + w_ц dt\cos(\Omega Y)\\ ds\cos(kZ) &= d\sigma\cos(\varkappa Z) + w_ц dt\cos(\Omega Z)\end{aligned}\right\}, \;.\;.\quad (158)$$

выражающія, что безконечно малая длина ds, отложенная по направленію k, есть геометрическая сумма безконечно малой длины $d\sigma$, отложенной по направленію $\varkappa$, и безконечно малой длины $w_ц dt$, отложенной по направленію центральной оси $Ц\Omega°$.

Изъ этого видно:

что касательныя линіи $Цk$ и $Ц\varkappa$, проведенныя изъ общей точки $Ц$ къ обѣимъ кривымъ $Ц\,Ц_1\,Ц_2\ldots.\;Ц\,Ц'\,Ц''\ldots$, составляютъ одна съ другою нѣкоторый уголъ $kЦ\varkappa$ (черт. 64).

что эти касательныя линіи лежатъ *въ одной плоскости* съ центральною осью $Ц\Omega°$.

Но очевидно, что плоскость, проведенная черезъ производящую $Ц\Omega°$ и черезъ касательную линію k, есть касательная плоскость

II-37

къ неподвижному аксоиду, проведенная въ точкѣ *Ц*; точно также плоскость, проведенная черезъ ту же производящую и черезъ касательную линію $\varkappa$, есть касательная плоскость къ подвижному аксоиду, проведенная въ точкѣ *Ц*; слѣдовательно оба аксоида имѣютъ общую касательную плоскость въ общей точкѣ *Ц*.

Общая точка *Ц* есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки *Ю* на общую производящую; если мы перемѣнимъ точку *Ю* на другую какую либо точку *Я* твердаго тѣла, то получимъ, вмѣсто точки *Ц*, другую точку *Ч* (черт. 65) центральной оси, находящуюся на основаніи перпендикуляра, опущеннаго изъ точки *Я* на ту же ось; геометрическія мѣста послѣдовательныхъ положеній точекъ *Ч* въ пространствѣ и въ тѣлѣ будутъ кривыя линіи: $Ч\,Ч_1\,Ч_2\ldots$, находящаяся на неподвижномъ, и $Ч\,Ч'\,Ч''\ldots$, находящаяся на подвижномъ аксоидѣ. То, что было доказано относительно касательныхъ линій, проведенныхъ изъ *Ц* къ линіямъ $Ц\,Ц'\,Ц''\ldots$, и $Ц\,Ц_1\,Ц_2\ldots$, примѣняется также и къ касательнымъ линіямъ, проведеннымъ изъ точки *Ч* къ кривымъ $Ч\,Ч_1\,Ч_2\ldots\;Ч\,Ч'\,Ч''\ldots$; а такъ какъ точка *Я* можетъ быть взята въ какой угодно точкѣ тѣла, то точкою *Ч* можетъ быть всякая точка общей производящей; слѣдовательно мы можемъ теперь сказать слѣдующее:

C) *Во всѣхъ точкахъ общей производящей оба аксоида имѣютъ общія касательныя плоскости.*

Изъ того, что высказано въ пунктахъ *A*, *B*, *C* настоящаго параграфа, мы получаемъ слѣдующее понятіе о движеніи подвижнаго аксоида по неподвижному:

Подвижный аксоидъ во всякій моментъ движенія имѣетъ общую производящую съ неподвижнымъ и соприкасается съ нимъ вдоль по всей этой линіи; движеніе подвижнаго аксоида есть катаніе по неподвижному аксоиду, соединенное со скольженіемъ вдоль по общей производящей.

Чтобы судить, насколько опредѣлительно такое выраженіе движенія подвижнаго аксоида, мы должны припомнить нѣкоторыя важнѣйшія общія свойства линейчатыхъ поверхностей.

11-38.

§ 38. Линейчатыя поверхности раздѣляются на два класса: на *косыя* и на *развертываемыя на плоскость* *).

1) Въ *косыхъ* поверхностяхъ отношеніе между кратчайшимъ разстояніемъ двухъ близкихъ непересѣкающихся производящихъ L_1 и L_2 и тангенсомъ угла, составляемаго ихъ направленіями, приближается къ конечному, неравному нулю, предѣлу, при приближеніи производящей L_2 къ производящей L_1 до совпаденія съ нею; этотъ предѣлъ мы будемъ означать буквою χ.

2) Въ поверхностяхъ же *развертываемыхъ на плоскость* предѣлъ того же отношенія равенъ нулю, такъ что кратчайшее разстояніе между двумя безконечно-близкими производящими, составляющими одна съ другою безконечно-малый уголъ перваго порядка, есть безконечно-малая величина высшаго порядка.

При приближеніи производящей L_2 къ производящей L_1 до совпаденія съ нею, та точка производящей L_1, которая находится въ кратчайшемъ разстояніи отъ L_2, приближается къ нѣкоторому предѣльному положенію $З$.

3) Геометрическое мѣсто точекъ $З$, находящихся на всѣхъ производящихъ *косой* поверхности, есть нѣкоторая кривая линія, принадлежащая поверхности и называемая линіею *сгуженія* косой поверхности; она *пересѣкаетъ* производящія подъ нѣкоторыми углами.

4) Геометрическое мѣсто точекъ $З$ поверхности *развертываемой на плоскость*, есть нѣкоторая кривая линія, называемая *ребромъ возврата поверхности;* каждая производящая касается къ ребру возврата въ своей точкѣ $З$.

5) Въ *косой* линейчатой поверхности касательныя плоскости, проведенныя въ различныхъ точкахъ одной и той же производящей L, проходятъ черезъ эту производящую, но не совпадаютъ одна съ другою; тангенсъ угла, составляемаго касательною плоскостью

---

*) Нѣкоторыя общія свойства линейчатыхъ поверхностей приводятся здѣсь безъ надлежащихъ доказательствъ; ихъ можно найти въ курсахъ Аналитической Геометріи и приложеніяхъ Дифференціальнаго Исчисленія къ Геометріи.

II-38.

въ точкѣ M (черт. 66), отстоящей отъ точки $З$ на длину Λ, съ касательною плоскостью въ точкѣ $З$, выражается слѣдующею формулою:

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\Lambda}{\chi}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (159)$$

въ точкѣ M_1, отстоящей на длину Λ по другую сторону точки $З$, уголъ Θ будетъ отрицательный, такъ что разстоянія $ЗM$ надо считать въ одну по производящей сторону положительными, а въ противоположную — отрицательными *)

6) Въ *развертываемой на плоскость* линейчатой поверхности касательныя плоскости, проведенныя въ различныхъ точкахъ одной и той же производящей L, совпадаютъ одна съ другою.

7) Въ *косой* поверхности плоскость, проведенная черезъ производящую L_1 параллельно безконечно-близкой ей производящей L_2, приближается, при приближеніи L_2 къ L_1 до ихъ совпаденія, къ *нормальной* плоскости къ поверхности въ точкѣ $З$, проведенной черезъ производящую L_1, и совпадаетъ съ нею при совпаденіи L_2 съ L_1.

8) Въ *развертываемой на плоскость* поверхности плоскость, проведенная черезъ производящую L_1, параллельно производящей L_2, сближающейся до совпаденія съ L_1, становится въ предѣлѣ плос-

---

*) Доказательство формулы (159) не представляетъ затрудненій: пусть $CABL_2$ (черт. 66) есть производящая, безконечно-близкая къ производящей $M_1ЗML_1$; $ЗA$—кратчайшее разстояніе между ними; cAb — линія параллельная производящей L_1, проведенная черезъ точку A; плоскости прямоугольныхъ треугольниковъ MBb и M_1Cc перпендикулярны къ производящей L_1. Тангенсъ угла BMb равняется отношенію $\overline{Bb}:\overline{Mb}$; изъ прямоугольнаго же треугольника BbA мы получимъ:

$$\overline{Bb}=\overline{Ab}\ \operatorname{tg}(BAb),$$

поэтому:

$$\operatorname{tg}(BMb)=\overline{MЗ}\cdot\frac{\operatorname{tg}(BAb)}{\overline{ЗA}};$$

отсюда, въ предѣлѣ, при приближеніи L_2 къ L_1, получается формула (159), такъ какъ уголъ BMb приближается къ Θ, длина $MЗ$—къ Λ, а остальное отношеніе — къ $\frac{1}{\chi}$.

II - 38. 39.

костью кривизны ребра возврата въ точкѣ *3* производящей L_1 и, вмѣстѣ съ тѣмъ, касательною плоскостью къ поверхности по той же производящей.

§ 39. Изъ пунктовъ 5 и 6 предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что косая поверхность, имѣющая общую производящую съ развертываемою поверхностью, можетъ касаться послѣдней въ одной точкѣ общей производящей, но не во всѣхъ.

Отсюда видно, что если одинъ изъ двухъ аксоидовъ есть косая линейчатая поверхность, то другой не можетъ быть развертываемымъ на плоскость и обратно; т. е. *оба аксоида должны быть одного и того же класса линейчатыхъ поверхностей: или оба развертываемые, или оба косые.*

Для того, чтобы двѣ косыя линейчатыя поверхности могли соприкасаться во всѣхъ точкахъ общей имъ производящей, необходимо, чтобы законъ распредѣленія касательныхъ плоскостей во всѣхъ точкахъ этой производящей былъ одинъ и тотъ же для обѣихъ поверхностей; формула (159) показываетъ, что для этого *необходимо, чтобы параметръ* χ *для общей производящей былъ одинаковъ у обѣихъ поверхностей.* Для того же, чтобы обѣ такія поверхности дѣйствительно пришли въ соприкосновеніе во всѣхъ точкахъ общей производящей, *необходимо, чтобы линіи съуженія обѣихъ поверхностей пересѣклись въ одной точкѣ общей производящей и чтобы касательныя плоскости къ обѣимъ поверхностямъ въ этой точкѣ совпадали.*

Отсюда, въ примѣненіи къ линейчатымъ аксоидамъ, мы можемъ вывести слѣдующія заключенія:

Когда оба аксоида суть косыя линейчатыя поверхности, то параметры χ_1 *производящихъ подвижнаго аксоида должны быть равны параметрамъ* χ *тѣхъ производящихъ неподвижнаго аксоида, съ которыми они совпадутъ при движеніи тѣла;* такъ что если нѣкоторая производящая L' перваго аксоида дожна будетъ совпасть съ производящею L_1 втораго аксоида, то параметръ производящей L_1 долженъ равняться параметру производящей L'.

То положеніе, которое занимаетъ подвижный косой аксоидъ

II-39.

въ пространствѣ въ какой либо моментъ t, есть положеніе вполнѣ опредѣленное, такъ какъ нѣкоторая опредѣленная производящая L' его должна тогда совпадать съ опредѣленною производящею L_1 неподвижнаго аксоида, точка $З'$ пересѣченія производящей L' и линіи съуженія перваго аксоида должна совпадать съ точкою $З_1$ пересѣченія производящей L_1 и линіи съуженія второго аксода и касательная плоскость въ точкѣ $З'$ къ первому аксоиду должна совпадать съ касательною плоскостью въ точкѣ $З_1$ ко второму аксоиду.

Гиперболоиды вращенія, служащіе аксоидами въ движеніи твердаго тѣла, разсмотрѣнномъ въ примѣрѣ 17-мъ, имѣютъ линіями съуженія тѣ окружности, которыя описываются точками $Ц$ въ пространствѣ и въ твердомъ тѣлѣ. Вслѣдствіе симметріи однополаго гиперболоида вращенія вокругъ его оси, всѣ производящія его имѣютъ общій параметръ χ, равный длинѣ непересѣкающей полуоси гиперболоида *). Оба аксоида въ примѣрѣ 17-мъ должны имѣть равные параметры χ, то есть равныя непересѣкающія полуоси: $D \cot g\,\vartheta$ и $D_1 \cot g\,\vartheta_1$, что и было уже замѣчено въ § 36 при разсмотрѣніи этого примѣра.

Мы знаемъ, что мгновенное движеніе подвижнаго гиперболоида состоитъ изъ вращенія его вокругъ центральной оси Ω° (черт. 67) съ угловою скоростью

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + 2\omega\omega_1 \cos\alpha + \omega_1^2}$$

и изъ скольженія по этой оси со скоростью:

$$w_ц = w_ю \cos(w_ю \Omega) = \frac{A\omega\omega_1 \sin\alpha}{\Omega}.$$

---

*) Параметръ χ производящихъ гиперболоида вращенія.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

можетъ быть вычисленъ слѣдующимъ образомъ: вычислимъ тангенсъ угла Θ между касательными плоскостями, проведенными въ точкахъ, имѣющихъ координаты: (a, o, o) и (a, a, b); эти точки лежатъ на одной прямолинейной производящей, первая на шейкѣ поверхности, вторая — на разстояніи равномъ $\sqrt{a^2+b^2}$ отъ первой. Параметръ χ опредѣлится изъ формулы (159), въ которую подставимъ:

$$\Delta = \sqrt{a^2 + b^2};\ tg\Theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b};$$

получимъ: $\chi = b$.

Отношеніе $w_ц : \Omega$, опредѣляющее величину шага мновеннаго винтоваго движенія, равное:

$$\frac{w_ц}{\Omega} = \frac{A\omega\omega_1 \sin\alpha}{\Omega^2}.$$

можетъ быть выражено въ величинахъ D, D_1, ϑ, ϑ_1, опредѣляющихъ размѣры и относительное положеніе гиперболоидовъ; для этого мы представимъ послѣднее равенство въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{w_ц}{\Omega} = \frac{\sin\alpha}{\left[\frac{\Omega^4}{A\omega\omega_1 Rr} \cdot \frac{R}{\Omega} \cdot \frac{r}{\Omega}\right]};$$

затѣмъ возьмемъ имѣющіяся въ § 36 выраженія:

$$D = \frac{A\omega_1 r}{\Omega^2},\ D_1{}^{*)} = \frac{A\omega R}{\Omega^2},\ \cot\vartheta = \frac{R}{\omega_1 \sin\alpha},\ \cot\vartheta_1 = \frac{r}{\omega\sin\alpha},$$

изъ которыхъ составимъ другія, слѣдующія:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{D_1} = \frac{D + D_1}{DD_1} = \frac{\Omega^4}{A\omega\omega_1 Rr},$$

$$\cos\vartheta = \frac{R}{\Omega};\ \cos\vartheta_1 = \frac{r}{\Omega};$$

кромѣ того извѣстно, что: $\alpha = \vartheta + \vartheta_1$, поэтому разсматриваемое отношеніе выразится слѣдующею формулою:

$$\frac{w_ц}{\Omega} = \frac{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}{\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D_1}\right)\cos\vartheta\cos\vartheta_1},$$

которую можно написать такъ:

$$\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D_1}\right)\frac{w_ц}{\Omega} = \operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\vartheta_1 \ldots\ldots\ldots (160)$$

Относительное движеніе гиперболоидовъ другъ по другу встрѣчается въ Практической Механикѣ въ теоріи гиперболическихъ колесъ, служащихъ для непосредственной передачи вращенія между двумя непересѣкающимися и непараллельными валами; вращательное движеніе каждой пары такихъ колесъ, сцѣпленныхъ другъ съ другомъ зубцами, расположенными вдоль по производящимъ гиперболоидовъ, необходимо сопровождается нѣкоторымъ скольженіемъ соприкасающихся зубцовъ, другъ по другу, вдоль по общей производящей гиперболоидовъ.

---

*) Разность $(A - D)$ мы здѣсь означили черезъ D_1.

II-39.

На чертежѣ 67 представлены два гиперболоида, соприкасающіеся по общей производящей.

Всякія двѣ развертываемыя на плоскость линейчатыя поверхности будутъ соприкасаться одна съ другою во всѣхъ точкахъ общей имъ производящей тогда, когда совпадутъ касательныя плоскости, проведенныя къ обѣимъ поверхностямъ черезъ общую производящую.

Нетрудно видѣть, что это условіе еще не вполнѣ опредѣляетъ положенія обѣихъ поверхностей относительно другъ друга, такъ какъ разстояніе между тѣми точками $З_1$ и $З'$ общей производящей, которыя принадлежатъ ребрамъ возврата обѣихъ поверхностей, можетъ быть произвольнымъ.

Если оба аксоида какого либо движенія твердаго тѣла суть линейчатыя развертываемыя поверхности, то подобной неопредѣленности существовать не будетъ, такъ какъ можно показать, что въ этихъ случаяхъ точки $З_1$ и $З'$ должны совпадать.

Пусть L (черт. 68) есть общая производящая обѣихъ аксоидовъ въ моментъ t, L_2 и L'' суть тѣ производящія неподвижнаго и подвижнаго аксоидовъ, которыя совпадутъ одна съ другою въ моментъ $(t+dt)$. Такъ какъ оба аксоида суть развертываемыя линейчатыя поверхности, то кратчайшія разстоянія J_1J_2 и $J'J''$ производящихъ L_2 и L'' отъ производящей L суть безконечно-малыя величины высшаго порядка сравнительно съ углами, составляемыми направленіями этихъ производящихъ между собою; эти углы (между L_2 и L и между L'' и L) мы предполагаемъ безконечно-малыми перваго порядка. Разстоянія $J_1З_1$ и $J'З'$ суть величины безконечно-малыя, обращающіяся въ нуль при приближеніи dt къ нулю.

(На чертежѣ 68 плоскость QQ есть общая касательная плоскость къ обоимъ аксоидамъ; производящая J_2L_2, находящаяся по сю сторону этой плоскости, проведена сплошною чертою, производящая же $J''L''$, находящаяся по ту сторону плоскости QQ, проведена разрывною чертою).

Точку $З_1$ мы примемъ за точку $Ц$ для момента t; въ моментъ $(t+dt)$ этою точкою будетъ служить находящаяся на производя-

щей L_2 точка $Ц_1$ съ которою въ этотъ моментъ совпадаетъ точка $Ц'$, находящаяся на производящей L''.

Такъ какъ длины $З_1Ц_1$ и $З_1Ц'$ суть хорды дугъ ds и $d\sigma$, описанныхъ въ теченіи безконечно-малаго времени dt точками $Ц$ на обоихъ аксоидахъ, то эти хорды суть безконечно-малыя длины перваго порядка; того же порядка малости и длина $Ц_1Ц'$ равная $w_ц\, dt$.

Если принять въ разсчетъ, что длины $J_1З_1$ и $З_1Ц_1$ безконечно-малы, притомъ $З_1Ц_1$ — перваго порядка, что длина J_1J_2 есть безконечно-малая величина высшаго порядка и что уголъ между производящими L_2 и L есть безконечно-малая величина перваго порядка, то должны будемъ заключить, что уголъ $Ц_1З_1L$ есть также безконечно-малый уголъ перваго порядка; а потому разстояніе точки $Ц_1$ до прямой L есть безконечно-малая величина втораго порядка, дуга же ds, стягиваемая хордою $З_1Ц_1$, должна быть слѣдовательно касательною къ производящей L въ точкѣ $З_1$.

Изъ равенствъ же (158) слѣдуетъ, что проэкціи ds и $d\sigma$ на направленіе, перпендикулярное къ центральной оси, должны быть равны; взявъ за такое направленіе то, которое находится въ плоскости QQ, мы получимъ:

$$ds \sin(k\Omega) = d\sigma \sin(\varkappa\Omega); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (161)$$

слѣдовательно, если дуга ds касательна къ центральной оси, т. е. къ L, то и дуга $d\sigma$ тоже касательна къ этой производящей; а потому разстояніе точки $Ц'$ до производящей L должно быть безконечно-малою величиною втораго порядка.

Точка $Ц'$ находится на производящей L'', составляющей безконечно-малый уголъ перваго порядка съ производящею L; для того, чтобы эта точка отстояла отъ послѣдней линіи на безконечно-маломъ разстояніи втораго порядка, необходимо, чтобы $Ц'J''$ была безконечно-малою.

Изъ всего сказаннаго видно, что разстоянія $З_1J'$, J_1J', $З'З_1$ должны быть безконечно-малы, или что разстояніе $З'З_1$ не можетъ быть конечнымъ; то есть точки $З_1$ и $З'$ должны совпадать.

И такъ, *когда одинъ изъ аксоидовъ есть линейчатая раз-*

II - 39.

вертываемая на плоскость поверхность, то и другой аксоидъ есть линейчатая поверхность того же класса; въ каждый моментъ движенія подвижный аксоидъ имѣетъ опредѣленное положеніе въ пространствѣ, такъ какъ онъ соприкасается съ неподвижнымъ аксоидомъ по опредѣленной общей производящей и притомъ ребра возврата этихъ поверхностей касаются къ общей производящей въ общей точкѣ.

Мы приведемъ примѣръ движенія твердаго тѣла, при которомъ аксоиды суть развертываемыя линейчатыя поверхности.

Примѣръ 18. Точка *Ю* описываетъ винтовую линію:

$$x_{ю}=A\cos\omega t,\ y_{ю}=A\sin\omega t,\ z_{ю}=\frac{A\omega(\omega_1\cos\alpha+\omega)}{\omega_1\sin\alpha}t,$$

углы же *ф*, *ж* и *э* выражаются такъ:

$$ф=\alpha,\ ж=\frac{\pi}{2}+\omega t,\ э=\omega_1 t.$$

Поступая, какъ въ примѣрѣ 17-мъ, мы найдемъ, что точка *Ц* совпадаетъ съ точкою *Ю*, что уравненія центральной оси въ абсолютныхъ координатахъ — слѣдующія:

$$-\frac{x-A\cos\omega t}{\omega_1\sin\alpha\sin\omega t}=\frac{y-A\sin\omega t}{\omega_1\sin\alpha\cos\omega t}=\frac{z-z_{ю}}{\omega_1\cos\alpha+\omega}$$

и что уравненія ея въ относительныхъ координатахъ суть:

$$-\frac{\xi}{\omega\sin\alpha\cos\omega_1 t}=\frac{\eta}{\omega\sin\alpha\sin\omega_1 t}=\frac{\zeta}{\omega\cos\alpha+\omega_1}.$$

Центральная ось расположена въ плоскости *Z'ЮZ* (черт. 63) и составляетъ съ осью *ЮZ'* уголъ, тангенсъ котораго равенъ отношенію $(\omega_1\sin\alpha : R)$.

Неподвижный аксоидъ есть развертываемый геликоидъ, ребро возврата котораго есть кривая линія, описываемая точками *Ц*, а производящія составляютъ съ осью *Z* уголъ, тангенсъ котораго равенъ отношенію $(\omega_1\sin\alpha : R)$.

Подвижный аксоидъ есть круговая коническая поверхность, ось которой совпадаетъ съ осью **Z**; тангенсъ угла производящихъ съ осью равенъ отношенію: $(\omega\sin\alpha : r)$, а вершина движется по ребру возврата неподвижнаго аксоида.

П-40.

§ 40. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости. Мгновенный центръ. Центроиды. (полоиды).

При движеніи твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости, если возьмемъ эту плоскость за плоскость XY, въ ней точку $Ю$, а ось Z возьмемъ параллельною оси Z, такъ что оси Ξ и Υ будутъ заключаться въ плоскости XY, мы получимъ изъ формулъ (142) и (143) слѣдующія выраженія проэкцій скорости w какой либо точки $\mathfrak{M}$ твердаго тѣла на неподвижныя и подвижныя оси координатъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= w\cos(wX) = x'_{ю} - (y - y_{ю})\,\text{э}' \\
\frac{dy}{dt} &= w\cos(wY) = y'_{ю} + (x - x_{ю})\,\text{э}' \\
\frac{dz}{dt} &= w\cos(wZ) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (162)$$

$$\left.\begin{aligned}
w\cos(w\Xi) &= x'_{ю}\cos\text{э} + y'_{ю}\sin\text{э} - \eta\,\text{э}' \\
w\cos(w\Upsilon) &= -x'_{ю}\sin\text{э} + y'_{ю}\cos\text{э} + \xi\,\text{э}'
\end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (163)$$

потому что

$$\text{ф} = 0 \quad \text{ж} = 0 \quad z_{ю} = 0$$

$$P = 0 \quad Q = 0 \quad R = \text{э}'$$

$$p = 0 \quad q = 0 \quad r = \text{э}'$$

$$\lambda_x = \cos\text{э},\ \mu_x = -\sin\text{э},\ \lambda_y = \sin\text{э},\ \mu_y = \cos\text{э},\ \nu_z = 1 \qquad \text{§ 24}$$

$$\lambda_z = \mu_z = \nu_x = \nu_y = 0$$

Угловая скорость въ такомъ движеніи выражается величиною производной $\text{э}'$; мгновенная ось параллельна оси Z. Изображая угловую скорость длиною, мы должны откладывать ее отъ точки $Ю$ вверхъ, по направленію положительной оси Z, если $\text{э}' > 0$ и въ отрицательную сторону этой оси, если $\text{э}' < 0$.

Такъ какъ въ такомъ движеніи проэкціи скоростей всѣхъ точекъ тѣла на мгновенную ось равны нулю, то точки, находящіяся на

II-40.

центральной оси, имѣютъ скорости равныя нулю; изъ этого слѣдуетъ, что при движеніи твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости скорости точекъ нѣкоторой прямой линіи, перпендикулярной къ этой плоскости, равны нулю.

Такъ какъ такое движеніе всего твердаго тѣла вполнѣ опредѣляется движеніемъ какой либо плоской фигуры, неизмѣнно связанной съ тѣломъ и начерченной на плоскости ΞΥ, то обыкновенно разсуждаютъ о скоростяхъ точекъ только этой плоскости; понятно, что эти разсужденія распространяются и на всѣ точки твердаго тѣла, такъ какъ одновременныя скорости всѣхъ точекъ, находящихся на одной линіи, перпендикулярной къ плоскости $XУ$, равны и параллельны.

И такъ мы скажемъ, что при всякомъ непоступательномъ движеніи плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости, для всякаго момента движенія, существуетъ своя точка на движущейся плоскости, скорость скоторой въ этотъ моментъ равна нулю; эта точка называется *мгновеннымъ центромъ* этого момента.

Абсолютныя и относительныя координаты: x_c, y_c, ξ_c, η_c, мгновеннаго центра опредѣлятся для каждаго момента движенія изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$x_c = x_{\text{ю}} - \frac{y'_{\text{ю}}}{\text{э}'};\; y_c = y_{\text{ю}} + \frac{x'_{\text{ю}}}{\text{э}'} \quad \ldots\ldots \quad (164)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_c &= \frac{x'_{\text{ю}} \sin \text{э} - y'_{\text{ю}} \cos \text{э}}{\text{э}'} \\ \eta_c &= \frac{x'_{\text{ю}} \cos \text{э} + y'_{\text{ю}} \sin \text{э}}{\text{э}'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (165)$$

Одновременныя скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла суть вращательныя скорости вокругъ центральной мгновенной оси, проходящей черезъ мгновенный центръ и перпендикулярной къ плоскости $XУ$; въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ (162) и (164) можно получить слѣдующія выраженія:

$$w \cos(w, X) = -(y - y_c)\,\text{э}';\; w \cos(wУ) = (x - x_c)\,\text{э}'.$$

Примѣнимъ формулы (164) и (165) къ опредѣленію положеній мгно-

неннаго центра въ движеніяхъ примѣровъ 11 и 12. Въ примѣрѣ 11-мъ мы найдемъ:

$$x_c = 0,\ y_c = 0,\ \xi_c = -R,\ \eta_c = 0.$$

Впрочемъ въ этомъ примѣрѣ и безъ вычисленій видно, что мгновенный центръ постоянно находится въ началѣ O неподвижныхъ осей координатъ.

Въ примѣрѣ 12-мъ мы найдемъ:

$$x_c = 2R\cos\omega t,\ y_c = -2R\sin\omega t,$$

$$\xi_c = R\cos 2\omega t,\ \eta_c = -R\sin 2\omega t.$$

Первыя два изъ этихъ четырехъ равенствъ выражаютъ, что:

$$x_c = 2x_ю,\ y_c = 2y_ю,$$

то есть, что мгновенный центръ находится на одной прямой линіи съ точками O и $Ю$ и отстоитъ отъ O на разстояніе вдвое большее длины $\overline{OЮ}$; отсюда видно, что положеніе мгновеннаго центра на неподвижной плоскости XY непрерывно измѣняется вмѣстѣ съ измѣненіемъ положенія точки $Ю$ и что геометрическое мѣсто положеній его на этой плоскости есть окружность, уравненіе которой:

$$x_c^2 + y_c^2 = 4R^2.$$

Относительныя координаты мгновеннаго центра тоже измѣняются непрерывнымъ образомъ съ теченіемъ времени, такъ что геометрическое мѣсто положеній его на движущейся плоскости $\Xi\Upsilon$ есть кругъ, уравненіе котораго:

$$\xi_c^2 + \eta_c^2 = R^2;$$

центръ этого круга находится въ точкѣ $Ю$.

Въ большинствѣ случаевъ координаты x_c, y_c, ξ_c, η_c мгновеннаго центра суть непрерывныя функціи времени, то есть мгновенный центръ непрерывно измѣняетъ свое положеніе, какъ на неподвижной плоскости XY, такъ и на движущейся плоскости $\Xi\Upsilon$.

Геометрическое мѣсто положеній мгновеннаго центра на неподвижной плоскости XY, есть нѣкоторая кривая линія, называемая *неподвижною центроидою*.

II-40.

Геометрическое мѣсто положенiй мгновеннаго центра на подвижной плоскости $\Xi\Upsilon$ есть другая кривая линiя, называемая *подвижною центроидою.*

Уравненiе неподвижной центроиды получится по исключенiи времени изъ уравненiй (164); уравненiе подвижной центроиды получится по исключенiи времени изъ уравненiй (165).

Въ каждый моментъ движенiя подвижная центроида, неизмѣнно связанная съ плоскостью $\Xi\Upsilon$ и участвующая въ движенiи ея, имѣетъ общую съ неподвижною центроидою точку, служащую мгновеннымъ центромъ движенiя въ этотъ моментъ; вслѣдствiе движенiя подвижной центроиды, совпаденiе какой либо точки C' подвижной центроиды съ нѣкоторою точкою C_1 неподвижной центроиды существуетъ только на мгновенiе, замѣняясь немедленно совпаденiемъ двухъ сосѣднихъ съ ними точекъ этихъ кривыхъ.

Можно доказать, что движенiе, совершаемое подвижною центроидою, есть катанiе ея безъ скольженiя по центроидѣ неподвижной.

Это будетъ доказано, коль скоро мы убѣдимся, что общая точка обѣихъ кривыхъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и точка прикосновенiя ихъ и что точка прикосновенiя перемѣщается на равныя длины дугъ по обѣимъ кривымъ.

Пусть $C_1C_2C_3 \ldots$ есть неподвижная центроида (черт. 69), $C'C''C''' \ldots$ — подвижная центроида въ томъ положенiи, которое она занимаетъ въ моментъ t; въ этотъ моментъ точка C' совпадаетъ съ точкою C_1; x_c, y_c суть абсолютныя координаты точки C_1, а ξ_c, η_c, — относительныя координаты точки C'.

На чертежѣ (70) представлено положенiе подвижной центроиды въ моментъ $t+dt$, въ который точка C'' ея совпадаетъ съ точкою C_2 неподвижной центроиды. Точка C_2 безконечно-близка къ точкѣ C_1, такъ что абсолютныя координаты ея разнятся отъ абсолютныхъ координатъ послѣдней на величины безконечно-малыя dx_c, dy_c; точка C'' также безконечно близка къ точкѣ C' и относительныя координаты ея равны $\xi_c + d\xi_c$ и $\eta_c + d\eta_c$.

Величины dx_c, dy_c, $d\xi_c$, $d\eta_c$ мы получимъ черезъ дифференцированiе по t равенствъ (164) и (165); мы найдемъ изъ (164):

Ⅱ-Но.

$$dx_c = (x_ю' - \beta)\,dt;\ dy_c = (y_ю' + \alpha)\,dt, \quad \ldots . \quad (166)$$

гдѣ для краткости приняты обозначенія:

$$\alpha = \frac{d\left(\frac{x'_ю}{э'}\right)}{dt},\ \beta = \frac{d\left(\frac{y'_ю}{э'}\right)}{dt};$$

(изъ 165):

$$\left.\begin{aligned} d\xi_c &= (x'_ю \cos э + y'_ю \sin э + \alpha \sin э - \beta \cos э)\,dt = \\ &= ((x'_ю - \beta)\cos э + (y'_ю + \alpha)\sin э)\,dt \\ d\eta_c &= ((y'_ю + \alpha)\cos э - (x'_ю - \beta)\sin э)\,dt \end{aligned}\right\} \ldots (167)$$

Изъ равенствъ (166) и (167) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} d\xi_c &= \quad dx_c \cos э + dy_c \sin э \\ d\eta_c &= -dx_c \sin э + dy_c \cos э \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (168)$$

Назовемъ черезъ ds и $d\sigma$ длины безконечно-малыхъ дугъ $C_1\,C_2$ и $C'\,C''$, а черезъ k и $\varkappa$ направленія касательныхъ линій, проведенныхъ къ неподвижной и къ подвижной центроидамъ изъ общей точки C_1, C' въ стороны перемѣщеній общей точки по кривымъ.

Изъ равенствъ (168) мы легко получимъ:

$$d\sigma = \sqrt{(d\xi_c)^2 + (d\eta_c)^2} = \sqrt{(dx_c)^2 + (dy_c)^2} = ds \ldots . (169)$$

то есть, что длины безконечно-малыхъ дугъ, пройденныхъ въ теченіи безконечно-малаго времени общею точкою по обѣимъ кривымъ, равны.

Если раздѣлить первыя части равенствъ (168) на $d\sigma$, вторыя на ds, а вмѣсто $\cos э$ и $\sin э$ подставить: въ первомъ равенствѣ λ_x и λ_y, во второмъ μ_y и $(-\mu_x)$, то получимъ:

$$\frac{d\xi_c}{d\sigma} = \cos(\varkappa\Xi) = \frac{dx_c}{ds}\lambda_x + \frac{dy_c}{ds}\lambda_y$$

$$\frac{d\eta_c}{d\sigma} = \cos(\varkappa\Upsilon) = \frac{dx_c}{ds}\mu_x + \frac{dy_c}{ds}\mu_y,$$

или

$$\cos(\varkappa\Xi) = \cos(k\Xi)$$

$$\cos(\varkappa\Upsilon) = \cos(k\Upsilon)$$

то есть: направленіе k совпадаетъ съ направленіемъ $\varkappa$.

Доказавъ такимъ образомъ, что подвижная центроида касается къ неподвижной центроидѣ въ точкѣ, служащей мгновеннымъ центромъ въ разсматриваемое мгновеніе и что длины дугъ, заключающихся на обѣихъ кривыхъ между соотвѣтственными точками, равны, мы вправѣ сказать, что *при движеніи плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости, подвижная центроида катится безъ скольженія по центроидѣ неподвижной.*

Въ примѣрѣ 12-мъ подвижная центроида есть кругъ радіуса R, проходящій своею окружностью черезъ начало координатъ; онъ катится по по неподвижной центроидѣ, которая есть кругъ радіуса $2R$, имѣющій центръ въ началѣ координатъ. Катящійся кругъ находится внутри неподвижнаго.

Въ примѣрѣ 13-мъ уравненія центроидъ можно составить слѣдующимъ образомъ.

Уравненія (164) будутъ:

$$x_c = R\cos\omega t - \frac{\omega R\cos\omega t}{\vartheta'}, \quad \ldots\ldots \quad (170)$$

$$y_c = R\sin\omega t - \frac{\omega R\sin\omega t}{\vartheta'} \quad \ldots\ldots \quad (171)$$

Производная ϑ' опредѣлится изъ равенства:

$$-\frac{\omega R\cos\omega t}{\vartheta'} = L\cos\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (172)$$

которое получается черезъ дифференцированіе по времени равенства:

$$R\sin\omega t + L\sin\vartheta = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (173)$$

Исключивъ изъ равенствъ (170) и (172) производную ϑ', мы получимъ равенство:

$$x_c - R\cos\omega t = L\cos\vartheta, \quad \ldots\ldots \quad (174)$$

которое, вмѣстѣ съ равенствомъ (173), послужитъ для исключенія угла ϑ; получимъ:

$$x_c^2 - 2x_c R \cos \omega t = L^2 - R^2 \ldots\ldots (175)$$

Для исключенія отсюда времени t, мы возьмемъ, получающееся изъ (170) и (171), равенство:

$$y_c = x_c \operatorname{tg} \omega t,$$

изъ котораго получимъ:

$$\cos \omega t = \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}; \ldots\ldots\ldots (176)$$

наконецъ, по исключеніи времени изъ равенствъ (175) и (176), найдемъ уравненіе неподвижной центроиды:

$$x^2\left(1 - \frac{2R}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = L^2 - R^2 \ldots\ldots (177)$$

Выраженія (165) въ этомъ примѣрѣ получаютъ слѣдующій видъ:

$$\xi_c = -\frac{R\omega}{\vartheta'}\cos(\omega t - \vartheta), \quad \eta_c = -\frac{R\omega}{\vartheta'}\sin(\omega t - \vartheta) \ldots (178)$$

Чтобы составить уравненіе подвижной центроиды, надо исключить $t\omega$, ϑ, ϑ' изъ этихъ равенствъ и изъ равенствъ (172) и (173).

Мы составимъ сначала изъ равенствъ (178) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta &= -\frac{R\omega}{\vartheta'}\cos\omega t \\ \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta &= -\frac{R\omega}{\vartheta'}\sin\omega t \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots (179)$$

изъ которыхъ получимъ:

$$\frac{R\omega}{\vartheta'} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \ldots\ldots\ldots (180)$$

Удаливъ, при помощи равенствъ (172) и (173), величины $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ изъ равенствъ (179), получимъ равенства:

$$(\xi - L)\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta = 0$$

$$\left(\xi - \frac{L}{R}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta = 0,$$

II-40.

изъ которыхъ, по исключеніи угла ϑ, получимъ уравненіе подвижной центроиды:

$$\left(\xi - \frac{L}{R}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)(\xi - L) + \eta^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (181)$$

Обѣ центроиды изображены на чертежѣ 71-мъ.

Неподвижная центроида имѣетъ двѣ вѣтви, уравненія которыхъ мы напишемъ въ полярныхъ координатахъ (полюсъ — точка O, полярная ось — ось OX).

Уравненіе вѣтви $C_5C_0C_1$ есть: $r = R + \sqrt{\dfrac{L^2 - R^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

„ „ $C_2C_3C_4$ „ $r = R - \sqrt{\dfrac{L^2 - R^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$ *).

обѣ вѣтви имѣютъ общую ассимптоту, перпендикулярную къ оси X и пересѣкающую эту ось въ разстояніи $\sqrt{L^2 - R^2}$ отъ начала координатъ.

При одномъ полномъ оборотѣ точки $Ю$ вокругъ точки O, мгновенный центръ совершаетъ слѣдующее движеніе: вмѣстѣ съ выходомъ точки $Ю$ изъ положенія $Ю_0$, мгновенный центръ выходитъ изъ положенія C_0 и направляется, какъ указываетъ оперенная стрѣлка, въ сторону положительной оси $У$; когда точка $Ю$ придетъ въ положеніе P, мгновенный центръ удалится на безконечно-большое разстояніе въ сторону положительной оси $У$, но при дальнѣйшемъ движеніи точки $Ю$ онъ появится изъ безконечности съ совершенно противоположной стороны на вѣтви C_2C_3, по которой будетъ приближаться къ точкѣ C_3, по мѣрѣ приближенія точки $Ю$ къ положенію $Ю_3$; при движеніи точки $Ю$ отъ положенія $Ю_3$ къ положенію M, мгновенный центръ будетъ двигаться по кривой C_3C_4; въ моментъ прохожденія точки $Ю$ черезъ точку M произойдетъ снова скачокъ мгновеннаго центра со стороны $+\infty$ на сторону $-\infty$, послѣ чего мгновенный центръ появится на кривой C_5C_0.

Подвижная центроида имѣетъ также двѣ вѣтви: $C''\mathfrak{M}_2C^4$ и $C^5\mathfrak{M}_2C'$. Мы напишемъ уравненія этой кривой въ полярныхъ координатахъ на плоскости $\Xi\Upsilon$, полюсъ которыхъ мы возьмемъ въ точкѣ $Ю$, а полярную ось направимъ по положительной части оси Ξ.

---

*) Это равенство даетъ отрицательныя величины для радіусовъ векторовъ точекъ вѣтви $C_2C_3C_4$; это означаетъ, что соотвѣтственная точка кривой находится на отрицательномъ продолженіи радіуса вектора, проведеннаго подъ угломъ θ къ полярной оси.

II-40; III-41.

Положивъ въ уравненіи (181) $\xi = \rho \cos \vartheta$, $\eta = \rho \sin \vartheta$, мы получимъ изъ него уравненіе:

$$\rho = L \frac{L - R\cos\vartheta}{L\cos\vartheta - R},$$

которое, для угловъ ϑ не бо́льшихъ α и не меньшихъ $(-\alpha)$ (гдѣ α есть тотъ уголъ, косинусъ котораго равенъ отношенію R къ L и при которомъ радіусъ векторъ получаетъ безконечно-большую величину), даетъ радіусы векторы вѣтви $C''\mathfrak{M}_2C^4$, а для остальныхъ угловъ ϑ — отрицательныя величины радіусовъ векторовъ вѣтви $C^5\mathfrak{M}_2C''$.

Обѣ вѣтви касаются одна другой въ точкѣ $\mathfrak{M}_2$ и имѣютъ, каждая, по два ассимптотическія направленія; а именно: вѣтвь $C''\mathfrak{M}_2C^4$ — направленія составляющія съ осью Ξ углы $+\alpha$ и $-\alpha$, вѣтвь $C^5\mathfrak{M}_2C'$ — направленія, составляющія съ осью Ξ углы $(\pi - \alpha)$ и $(\pi + \alpha)$.

ГЛАВА III.

Относительное движеніе и скорость точки по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу или по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ.

§ 41. Относительное движеніе точки по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу есть переходъ ея черезъ точки этого тѣла, совершающійся, съ теченіемъ времени, послѣдовательно и непрерывно.

Положеніе движущейся точки M въ движущемся твердомъ тѣлѣ выражается *относительными координатами* ея ξ, η, ζ по отношенію къ координатнымъ плоскостямъ ΥIOZ, $ZIO\Xi$, $\Xi IO\Upsilon$, неизмѣнно связаннымъ съ тѣломъ.

Если точка M находится въ *относительномъ покоѣ* по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу, то относительныя координаты ея по отношенію къ нему суть величины постоянныя.

Если же точка M находится въ относительномъ движеніи по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу, то относительныя координаты ея по отношенію къ нему суть нѣкоторыя функціи времени:

$$\xi = \mathfrak{f}_1(t),\ \eta = \mathfrak{f}_2(t),\ \zeta = \mathfrak{f}_3(t) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (182)$$

Ш-Н1:42.

Непрерывная линія, которую точка M чертитъ въ тѣлѣ, называется *траэкторіею относительнаго движенія* ея по отношенію къ этому тѣлу; по исключеніи времени изъ равенствъ (182), мы получимъ два уравненія этой кривой въ относительныхъ координатахъ.

Примѣчаніе. Употребленіе словъ: „твердое тѣло", въ ученіи объ относительномъ движеніи, сопряжено съ нѣкоторыми неудобствами. Мы привыкли считать каждое твердое тѣло непроницаемымъ и ограниченнымъ въ его размѣрахъ; поэтому, говоря объ относительномъ движеніи, по отношенію къ нѣкоторому твердому тѣлу, нѣкоторой точки M, посторонней этому тѣлу, мы большею частью предполагаемъ такіе случаи, въ которыхъ точка M движется по поверхности тѣла или внѣ его; но когда точка M движется внѣ твердаго тѣла, тогда опредѣленіе относительнаго движенія, данное въ началѣ этого параграфа, теряетъ смыслъ.

Во избѣжаніе такихъ неудобствъ, мы представимъ себѣ нѣкоторую неограниченную *неизмѣняемую движущуюся среду*, проницаемую для точки M и неизмѣнно связанную съ твердымъ тѣломъ; относительныя координаты точекъ этой среды по отношенію къ осямъ координатъ, неизмѣнно связаннымъ съ твердымъ тѣломъ, постоянны.

Относительное движеніе точки M по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу есть переходъ ея черезъ точки неизмѣняемой неограниченной среды, составляющей одно неизмѣняемое цѣлое съ твердымъ тѣломъ.

§ 42. Зная движеніе твердаго тѣла и абсолютное движеніе точки, опредѣлить относительное движеніе ея по отношенію къ этому тѣлу.

Если извѣстно абсолютное движеніе точки M:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)\ \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и абсолютное движеніе твердаго тѣла или неизмѣняемой среды:

$$\left.\begin{array}{l} x_ю = \varphi_1(t),\ y_ю = \varphi_2(t),\ z_ю = \varphi_3(t) \\ \psi = \Phi_1(t),\ ж = \Phi_2(t),\ э = \Phi_3(t) \end{array}\right\},\ \ldots\ldots \quad (85)$$

III-42.

то, чтобы получить функціи $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$, выражающія относительное движеніе точки M, надо взять формулы (46) стр. 56 и подставить въ нихъ: вмѣсто $x, y, z, x_ю, y_ю, z_ю$ — функціи f_1, f_2, f_3 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; вмѣсто λ_x, λ_y . . . . ν_z — ихъ выраженія: (47 — 55) въ тригонометрическихъ функціяхъ угловъ *ф*, *ж*, *э*, замѣнивъ послѣдніе функціями Φ_1, Φ_2, Φ_3; вторыя части формулъ (46) будутъ тѣ функціи $\mathfrak{f}_1(t)$, $\mathfrak{f}_2(t)$ $\mathfrak{f}_3(t)$, которыя выражаютъ измѣненіе относительныхъ координатъ точки M съ теченіемъ времени.

Примѣръ 19-й. Абсолютное движеніе точки M прямолинейное:

$$x = af(t), \; y = bf(t), \; z = cf(t);$$

движеніе твердаго тѣла поступательное и всѣ точки его движутся также прямолинейно:

$$x_ю = l + \alpha F(t), \; y_ю = m + \beta F(t), \; z_ю = n + \gamma F(t).$$

Оси Ξ, Υ, Z мы возьмемъ параллельными неподвижнымъ осямъ. Относительное движеніе точки M выразится равенствами:

ф. 46 при $\lambda_x = \mu_y = \nu_z = 1$
$\lambda_y = \lambda_z = \mu_x = \mu_z = \nu_x = \nu_y = 0$

$$\xi = af(t) - \alpha F(t) - l$$
$$\eta = bf(t) - \beta F(t) - m$$
$$\zeta = cf(t) - \gamma F(t) - n.$$

Два уравненія траэкторіи относительнаго движенія должны получиться по исключеніи времени изъ этихъ равенствъ; пока неизвѣстенъ видъ функцій f и F, можно получить только одно изъ уравненій траэкторіи, помноживъ первое равенство на $(b\gamma - c\beta)$, второе на $(c\alpha - a\gamma)$, третье на $(a\beta - b\alpha)$, и сложивъ всѣ три; получится уравненіе:

$$(\xi + l)(b\gamma - c\beta) + (\eta + m)(c\alpha - a\gamma) + (\zeta + n)(a\beta - b\alpha) = 0$$

линейное относительно ξ, η, ζ, опредѣляющее нѣкоторую плоскость, неизмѣнно связанную съ тѣломъ; траэкторія относительнаго движенія заключается въ этой плоскости.

Если $F(t) = Af(t) + B$, то траэкторія относительнаго движенія есть прямая линія:

$$\frac{\xi + l + \alpha B}{a - \alpha A} = \frac{\eta + m + \beta B}{b - \beta A} = \frac{\zeta + n + \gamma B}{c - \gamma A}.$$

11*

III-42.

Если $\alpha = ka$, $\beta = kb$, $\gamma = kc$, то траэкторія есть также прямая линія:

$$\frac{\xi + l}{a} = \frac{\eta + m}{b} = \frac{\zeta + n}{c}.$$

Возьмемъ слѣдующій спеціальный случай:

$$x = 0,\ y = \frac{gt^2}{2},\ z = 0$$

$$x_ю = -\alpha t,\quad y_ю = 0,\quad z_ю = 0.$$

Траэкторія относительнаго движенія будетъ парабола:

$$\xi^2 = \frac{2\alpha^2}{g}\,\eta,$$

имѣющая вершину въ точкѣ *Ю* и осью — ось *ЮY*.

Примѣръ 20. Абсолютное движеніе точки *M* равномѣрно и прямолинейно по оси *X*, твердое же тѣло равномѣрно вращается вокругъ отрицательной оси *Z* съ угловою скоростью ω:

$$x = at,\ y = 0,\ \text{э} = -\omega t.$$

Относительное движеніе выражается равенствами: (§ 40)

$$\xi = at\cos\omega t,\ \eta = at\sin\omega t$$

и траэкторія есть Архимедова спираль:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Примѣръ 21. Абсолютное движеніе точки *M* совершается по окружности радіуса *R*:

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t;$$

твердое тѣло совершаетъ поступательное движеніе параллельно плоскости *XY*, причемъ точка *Ю* движется по окружности радіуса R_1 и радіусъ векторъ ея *OЮ* имѣетъ ту же угловую скорость, что и радіусъ векторъ *OM*:

$$x_ю = R_1\cos(\omega t + \alpha),\ y_ю = R_1\sin(\omega t + \alpha).$$

Относительное движеніе выражается такъ:

$$\xi = D\cos(\omega t - \gamma),\ \eta = D\sin(\omega t - \gamma),$$

III-42.

гдѣ:

$$D = \sqrt{R_1^2 - 2R_1R\cos\alpha + R^2},$$

$$D\cos\gamma = R - R_1\cos\alpha, \quad D\sin\gamma = R_1\sin\alpha;$$

то есть относительное движеніе точки M по плоскости ΞΥ совершается по окружности радіуса D вокругъ точки $Ю$, причемъ радіусъ векторъ $ЮM$ имѣетъ въ относительномъ движеніи ту же угловую скорость вокругъ $Ю$, что и радіусъ векторъ OM вокругъ точки O въ абсолютномъ.

Примѣръ 22-й. Точки M и $Ю$ движутся съ равными скоростями по одной и той же окружности, но въ противоположныя стороны; движеніе тѣла поступательное: § 40

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t,$$

$$x_ю = R\cos(\omega t + \alpha), \quad y_ю = -R\sin(\omega t + \alpha). \quad э = 0$$

Относительное движеніе:

$$\xi = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \eta = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)$$

совершается вдоль по линіи:

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

наклоненной къ оси Ξ подъ угломъ $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, къ оси Υ — подъ угломъ $\frac{\alpha}{2}$; движеніе точки M по этой линіи происходитъ по слѣдующему закону:

$$s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad s = 2R\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right),$$

гдѣ s есть разстояніе точки M отъ точки $Ю$.

Примѣръ 23. Твердое тѣло движется поступательно, точки M и $Ю$ описываютъ на плоскости XY эллипсы, главные діаметры которыхъ направлены по осямъ X и Y:

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\sin\omega t,$$

$$x_ю = A_1\cos(\omega t + k), \quad y_ю = B_1\sin(\omega t + k). \quad э = 0$$

III-42.

Относительное движеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\xi = a\cos\omega t + \alpha\sin\omega t;\ \eta = b\cos\omega t + \beta\sin\omega t,$$

гдѣ

$$a = A - A_1\cos k,\quad \alpha = A_1\sin k$$
$$b = - B_1\sin k,\quad \beta = B - B_1\cos k.$$

На страницѣ 50, въ задачѣ 5-й, были приведены подобныя же выраженія движенія точки; убѣдиться въ томъ, что кривая, описываемая точкою, есть эллипсъ и опредѣлить величины и положенія главныхъ полуосей этого эллипса, предоставляемъ читателю.

Примѣръ 24. Тѣло вращается равномѣрно вокругъ отрицательной оси Z съ угловою скоростью ω. Абсолютное движеніе точки M на плоскости XY совершается по слѣдующему закону: см. т. II стр. 153.

Свободное паденіе тѣла на экваторѣ въ первомъ приближеніи):

$$x = b\omega t,\ y = b - \frac{Gt^2}{2},$$

$x_ю = y_ю = 0;\ э = -\omega t$

такъ что траэкторія абсолютнаго движенія этой точки есть парабола (черт. 72), вершина которой находится въ точкѣ B (координаты $x = 0$, $y = b$), а ось направлена по BO; скорость абсолютнаго движенія точки M въ точкѣ B направлена параллельно оси X и равна $b\omega$, то есть имѣетъ ту самую величину и то направленіе, которыя она имѣла бы, если бы точка была неизмѣнно связана съ вращающимся твердымъ тѣломъ. Оси Ξ и Υ въ началѣ движенія (въ моментъ $t = o$) возьмемъ совпадающими съ осями X и Y.

При такихъ данныхъ, относительное движеніе точки M по отношенію къ твердому тѣлу выразится такимъ образомъ: (46)

ф. 46

$$\xi = x\lambda_x + y\lambda_y;\quad \eta = x\mu_x + y\mu_y;$$

а такъ какъ: $ж = 0;\ ф = 0;\ э = \omega t$;

ф. 47-55

$$\lambda_x = \cos\omega t,\ \lambda_y = -\sin\omega t,\ \mu_x = \sin\omega t,\ \mu_y = \cos\omega t,$$

то:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= b\omega t\cos\omega t - \left(b - \frac{Gt^2}{2}\right)\sin\omega t\\ \eta &= b\omega t\sin\omega t + \left(b - \frac{Gt^2}{2}\right)\cos\omega t\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (183)$$

По исключеніи изъ этихъ выраженій времени, мы получимъ уравненіе траэкторіи относительнаго движенія.

III-42.

Мы разсмотримъ относительное движеніе не на всемъ протяженіи его, но только вблизи его начала.

Имѣя въ виду такое ограниченіе изслѣдованія, мы перенесемъ начало подвижныхъ координатныхъ осей въ точку B_1, находящуюся на прежней оси Υ, въ разстояніи b отъ точки O; новую ось Υ_1 направимъ отъ B_1 къ O, а новую ось Ξ_1 параллельно преждей оси Ξ; тогда прежнія координаты ξ, η выразятся въ новыхъ координатахъ ξ_1 η_1 слѣдуюшимъ образомъ:

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = b - \eta_1;$$

поэтому вмѣсто втораго изъ выраженій (183) можемъ написать слѣдующее выраженіе:

$$\eta_1 = b\,(1 - \cos \omega t - \omega t \sin \omega t) + \frac{Gt^2}{2} \cos \omega t.$$

Затѣмъ, разложивъ косинусъ и синусъ по восходящимъ степенямъ ωt, представимъ выраженія для ξ_1 и η_1 въ видѣ слѣдующихъ рядовъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \left(\frac{G}{2} - \frac{b\omega^2}{3}\right)\omega t^3 - \left(\frac{G}{2} - \frac{b\omega^2}{5}\right)\frac{\omega^3 t^5}{1.2.3} + \dots \\ \eta_1 &= \left(G - b\omega^2\right)\frac{t^2}{2} - \left(G - \frac{b\omega^2}{2}\right)\frac{\omega^2 t^4}{4} + \dots \end{aligned}\right\} \quad (184)$$

Мы теперь сдѣлаемъ слѣдующія предположенія относительно величинъ G, ω, b.

Величина b есть весьма большая длина, выражаемая милліонами метровъ; пусть напримѣръ b=6370900 метр., то есть b равно среднему радіусу земнаго шара.

Величина ω есть малая угловая скорость; пусть напримѣръ ω=0,0000729 $\frac{1}{\text{секунда}}$, то есть ω равна угловой скорости суточнаго вращенія земли.

Величина G есть средняя величина ускоренія силы тяжести, то есть

$$G = 9{,}8 \; \frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2}.$$

Изъ этихъ цифръ мы найдемъ, что величина $b\omega^2$, входящая въ ряды (184), равна:

$$b\omega^2 = 0{,}03385 \; \frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},$$

III-42.

и что:

$$\omega^2 = 0{,}0000000053 \ \frac{1}{(\text{секунда})^2}$$

$$\omega^3 = 0.00000000000039 \ \frac{1}{(\text{секунд.})^3}.$$

Если рѣшимся пренебрегать длинами меньшими одной десятой доли миллиметра, то, для первыхъ пятидесяти секундъ отъ начала движенія, мы можемъ пренебречь вторыми и слѣдующими членами рядовъ (184); тогда останется:

$$\xi_1 = \left(\frac{3}{2} G - b\omega^2\right) \frac{\omega t^3}{3}, \eta_1 = \left(G - b\omega^2\right) \frac{t^2}{2} \quad . \ . \ . \ (185)$$

Такъ какъ $b\omega^2$ менѣе G, то изъ этихъ приближенныхъ формулъ видно, что въ первыя секунды движенія точка M, въ относительномъ движеніи по отношенію къ вращающемуся тѣлу, отклоняется въ сторону оси Ξ_1, т.-е. въ сторону вращенія тѣла, и падаетъ по оси Υ равно-ускоренно, съ ускореніемъ: $(G - b\omega^2)$.

По исключеніи времени t изъ равенствъ (185), получимъ уравненіе начальной части траэкторіи относительнаго движенія; уравненіе это есть уравненіе полукубической параболы.

Примѣръ 25. Твердое тѣло вращается какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; абсолютное движеніе точки M начинается изъ той же точки B и съ тою же скоростью $b\omega$ какъ и тамъ, но совершается по закону, выражаемому слѣдующими рядами:

$$\left.\begin{aligned} x &= b\omega t\left(1 - \frac{G}{b}\frac{t^2}{1.2.3} - \ . \ . \ . \ .\right) \\ y &= \ b\left(1 - \frac{G}{b}\frac{t^2}{1.2} - \ . \ . \ . \ .\right) \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ (186)$$

дальнѣйшіе члены этихъ рядовъ заключаютъ: вторыя и высшія степени отношенія $(G:b)$, отношеніе $G\omega^2:b$ и высшія степени его.

Отношеніе $(G:b)$ равняется:

$$\frac{G}{b} = 0{,}00000153 \frac{1}{(\text{секунд.})^2}.$$

Если будемъ разсматривать движеніе только впродолженіи первыхъ 10—20 секундъ отъ начала его, то можетъ пренебречь третьими и слѣдующими членами рядовъ (186).

Поступивъ такъ, какъ въ прошломъ примѣрѣ, мы найдемъ, что, въ

III-42.43.

продолженіи первыхъ десятковъ секундъ отъ начала движенія, относительное движеніе точки M по отношенію къ вращающемуся тѣлу происходитъ по слѣдующему закону:

$$\xi_1 = \left(G - b\omega^2\right)\frac{\omega t^3}{3}; \quad \eta_1 = \left(G - b\omega^2\right)\frac{t^2}{2} \quad \ldots (187)$$

Траэкторія относительнаго движенія есть полукубическая парабола:

$$\xi_1 = \frac{2\omega\sqrt{2}}{3\sqrt{g}}\eta_1^{\frac{3}{2}}, \text{ гдѣ: } g = G - b\omega^2.$$

Движеніе, разсматриваемое въ этомъ примѣрѣ, совершается по отношенію къ вращающейся землѣ тяжелымъ тѣломъ, свободно падающимъ подъ экваторомъ; въ надлежащемъ мѣстѣ нашего курса мы покажемъ, что абсолютное движеніе такого тѣла происходитъ, по законамъ, указаннымъ въ 10-мъ примѣрѣ (стр. 41), по эллипсу, одинъ фокусъ котораго находится въ центрѣ земли O, другой—въ точкѣ O_1 (черт. 73), отстоящей отъ O на длину равную:

$$\frac{2b^2\omega^2}{G}\frac{e}{1-e^2},$$

гдѣ $e = 1 - \frac{b\omega^2}{C}$ есть эксентриситетъ эллипса; большая же полуось a имѣетъ такую величину, что $a\,(1+e) = b$, гдѣ b означаетъ величину средняго радіуса земли. Точка B есть точка наименьшей скорости на этомъ эллипсѣ, величина же n (стр. 41) равняется:

$$n = \frac{R^2\omega}{a^2\sqrt{1-e^2}}.$$

§ 43. Скорость относительнаго движенія.

Абсолютное движеніе разсматривается происходящимъ въ неподвижномъ пространствѣ, причемъ положеніе точки въ немъ опредѣляется абсолютными координатами, считаемыми отъ неподвижныхъ плоскостей координатъ; траэкторія абсолютнаго движенія есть кривая неподвижная.

Относительное движеніе по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ разсматривается совершающимся въ этой средѣ, причемъ положеніе точки въ ней опредѣляется относительными ко-

III-43.

ординатами, считаемыми отъ плоскостей координатъ, принадлежащихъ средѣ; траэкторія относительнаго движенія есть кривая, неизмѣнно связанная съ движущеюся средою.

Подобная аналогія между разсмотрѣніемъ абсолютнаго и относительнаго движенія можетъ быть продолжена и далѣе; чтобы дать опредѣленія понятій о средней скорости и о скорости въ какой-либо моментъ относительнаго движенія, надо повторить то, что сказано въ §§ 8—12, причемъ слова: «пространство», «неподвижныя оси координатъ», «абсолютныя координаты», «абсолютное движеніе», «траэкторія абсолютнаго движенія», и проч., надо замѣнить, соотвѣтственно, словами: «неизмѣняемая движущаяся среда», «подвижныя оси кординатъ», «относительныя координаты», «относительное движеніе», «траэкторія относительнаго движенія» и проч.; для избѣжанія длинноты повторенія, мы можемъ привести только самыя опредѣленія, безъ объясненій.

Средняя относительная скорость въ пути, пройденномъ точкою M въ неизмѣняемой движущейся средѣ въ теченіи промежутка времени $(t_2—t_1)$ есть отношеніе:

$$\frac{\lambda}{t_2 - t_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (188)$$

между длиною $\bar{\lambda}$ пути, пройденнаго точкою M по траэторіи относительнаго движенія въ теченіи этого промежутка времени и величиною самаго промежутка; отношеніе это имѣетъ всегда величину положительную.

Средняя относительная скорость перемѣщенія точки M по положительному направленію траэкторіи относительнаго движенія въ теченіи промежутка времени $(t_2—t_1)$ есть отношеніе:

$$\frac{\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_1}{t_2 - t_1}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (189)$$

въ которомъ $\mathfrak{s}_2$ и $\mathfrak{s}_1$ означаютъ разстоянія, считаемыя, по траэкторіи относительнаго движенія, отъ нѣкоторой начальной точки $\mathfrak{S}_0$ этой кривой до положеній, занимаемыхъ точкою M въ моменты t_2 и t_1; по одному направленію траэкторіи разстоянія отъ $\mathfrak{S}_0$ считаются по-

III-43.

ложительными, по противоположному—отрицательными; отношеніе (189) можетъ имѣть положительную или отрицательную величину.

Величина скорости (u) относительнаго движенія точки M въ моментъ t есть предѣлъ, къ которому приближается средняя относительная скорость въ пути, совершаемомъ точкою M въ относительномъ движеніи въ теченіи промежутка времени, начинающагося въ моментъ t, при уменьшеніи промежутка до нуля; т. е.

$$u = \text{предѣлу} \left[\frac{\lambda(t+\vartheta, t)}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (190)$$

эта величина всегда положительная.

Предѣлъ, къ которому при этомъ приближается средняя относительная скорость *перемѣщенія*, мы будемъ называть *относительною скоростью точки M въ моментъ t по положительному направленію относительной траэкторіи;* она равна производной:

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$$

и можетъ быть положительною или отрицательною, смотря по направленію относительнаго движенія точки въ моментъ t.

Направленіе относительнаго движенія точки M, въ какомъ-либо положеніи ея, совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ траэкторіи относительнаго движенія, проведенной изъ положенія точки M.

Величина скорости u есть абсолютная величина производной $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$, то есть:

$$u = +\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)^2}$$

Производныя:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{f}_1'(t), \frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{f}_2'(t), \frac{d\zeta}{dt} = \mathfrak{f}_3'(t). \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (191)$$

суть скорости, по положительнымъ направленіямъ осей Ξ, Υ, Z, проэкцій движущейся точки на эти оси.

Ⅱ-40.

изъ которыхъ, по исключеніи угла ϑ, получимъ уравненіе подвижной центроиды:

$$\left(\xi - \frac{L}{R}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)(\xi - L) + \eta^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (181)$$

Обѣ центроиды изображены на чертежѣ 71-мъ.

Неподвижная центроида имѣетъ двѣ вѣтви, уравненія которыхъ мы напишемъ въ полярныхъ координатахъ (полюсъ — точка O, полярная ось — ось OX).

$$\text{Уравненіе вѣтви } C_5C_0C_1 \text{ есть: } r = R + \sqrt{\frac{L^2 - R^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$\text{„} \qquad \text{„} \quad C_2C_3C_4 \quad \text{„} \quad r = R - \sqrt{\frac{L^2 - R^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \; *).$$

обѣ вѣтви имѣютъ общую ассимптоту, перпендикулярную къ оси X и пересѣкающую эту ось въ разстояніи $\sqrt{L^2 - R^2}$ отъ начала координатъ.

При одномъ полномъ оборотѣ точки $Ю$ вокругъ точки O, мгновенный центръ совершаетъ слѣдующее движеніе: вмѣстѣ съ выходомъ точки $Ю$ изъ положенія $Ю_0$, мгновенный центръ выходитъ изъ положенія C_0 и направляется, какъ указываетъ оперенная стрѣлка, въ сторону положительной оси $У$; когда точка $Ю$ придетъ въ положеніе P, мгновенный центръ удалится на безконечно-большое разстояніе въ сторону положительной оси $У$, но при дальнѣйшемъ движеніи точки $Ю$ онъ появится изъ безконечности съ совершенно противоположной стороны на вѣтви C_2C_3, по которой будетъ приближаться къ точкѣ C_3, по мѣрѣ приближенія точки $Ю$ къ положенію $Ю_3$; при движеніи точки $Ю$ отъ положенія $Ю_3$ къ положенію M, мгновенный центръ будетъ двигаться по кривой C_3C_4; въ моментъ прохожденія точки $Ю$ черезъ точку M произойдетъ снова скачокъ мгновеннаго центра со стороны $+\infty$ на сторону $-\infty$, послѣ чего мгновенный центръ появится на кривой C_5C_0.

Подвижная центроида имѣетъ также двѣ вѣтви: $C''\mathfrak{M}_2C^4$ и $C^5\mathfrak{M}_2C'$. Мы напишемъ уравненія этой кривой въ полярныхъ координатахъ на плоскости $\Xi\Upsilon$, полюсъ которыхъ мы возьмемъ въ точкѣ $Ю$, а полярную ось направимъ по положительной части оси Ξ.

---

*) Это равенство даетъ отрицательныя величины для радіусовъ векторовъ точекъ вѣтви $C_2C_3C_4$; это означаетъ, что соотвѣтственная точка кривой находится на отрицательномъ продолженіи радіуса вектора, проведеннаго подъ угломъ θ къ полярной оси.

II-40; III-41.

Положивъ въ уравненіи (181) $\xi=\rho\cos\vartheta$, $\eta=\rho\sin\vartheta$, мы получимъ изъ него уравненіе:

$$\rho = L\frac{L-R\cos\vartheta}{L\cos\vartheta - R},$$

которое, для угловъ ϑ не бо́льшихъ α и не меньшихъ $(-\alpha)$ (гдѣ α есть тотъ уголъ, косинусъ котораго равенъ отношенію R къ L и при которомъ радіусъ векторъ получаетъ безконечно-большую величину), даетъ радіусы векторы вѣтви $C''\mathfrak{M}_2C^4$, а для остальныхъ угловъ ϑ — отрицательныя величины радіусовъ векторовъ вѣтви $C^5\mathfrak{M}_2C'$.

Обѣ вѣтви касаются одна другой въ точкѣ $\mathfrak{M}_2$ и имѣютъ, каждая, по два ассимптотическія направленія; а именно: вѣтвь $C''\mathfrak{M}_2C^4$ — направленія составляющія съ осью Ξ углы $+\alpha$ и $-\alpha$, вѣтвь $C^5\mathfrak{M}_2C'$ — направленія, составляющія съ осью Ξ углы $(\pi-\alpha)$ и $(\pi+\alpha)$.

ГЛАВА III.

Относительное движеніе и скорость точки по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу или по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ.

§ 41. Относительное движеніе точки по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу есть переходъ ея черезъ точки этого тѣла, совершающійся, съ теченіемъ времени, послѣдовательно и непрерывно.

Положеніе движущейся точки M въ движущемся твердомъ тѣлѣ выражается *относительными координатами* ея ξ, η, ζ по отношенію къ координатнымъ плоскостямъ $\Upsilon Ю \mathrm{Z}$, $\mathrm{Z} Ю \Xi$, $\Xi Ю \Upsilon$, неизмѣнно связаннымъ съ тѣломъ.

Если точка M находится въ *относительномъ покоѣ* по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу, то относительныя координаты ея по отношенію къ нему суть величины постоянныя.

Если же точка M находится въ относительномъ движеніи по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу, то относительныя координаты ея по отношенію къ нему суть нѣкоторыя функціи времени:

$$\xi=\mathfrak{f}_1(t),\ \eta=\mathfrak{f}_2(t),\ \zeta=\mathfrak{f}_3(t)\ \ldots\ldots\ (182)$$

Ш-41:42.

Непрерывная линія, которую точка M чертитъ въ тѣлѣ, называется *траэкторіею относительнаго движенія* ея по отношенію къ этому тѣлу; по исключеніи времени изъ равенствъ (182), мы получимъ два уравненія этой кривой въ относительныхъ координатахъ.

Примѣчаніе. Употребленіе словъ: „твердое тѣло“, въ ученіи объ относительномъ движеніи, сопряжено съ нѣкоторыми неудобствами. Мы привыкли считать каждое твердое тѣло непроницаемымъ и ограниченнымъ въ его размѣрахъ; поэтому, говоря объ относительномъ движеніи, по отношенію къ нѣкоторому твердому тѣлу, нѣкоторой точки M, посторонней этому тѣлу, мы большею частью предполагаемъ такіе случаи, въ которыхъ точка M движется по поверхности тѣла или внѣ его; но когда точка M движется внѣ твердаго тѣла, тогда опредѣленіе относительнаго движенія, данное въ началѣ этого параграфа, теряетъ смыслъ.

Во избѣжаніе такихъ неудобствъ, мы представимъ себѣ нѣкоторую неограниченную *неизмѣняемую движущуюся среду*, проницаемую для точки M и неизмѣнно связанную съ твердымъ тѣломъ; относительныя координаты точекъ этой среды по отношенію къ осямъ координатъ, неизмѣнно связаннымъ съ твердымъ тѣломъ, постоянны.

Относительное движеніе точки M по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу есть переходъ ея черезъ точки неизмѣняемой неограниченной среды, составляющей одно неизмѣняемое цѣлое съ твердымъ тѣломъ.

§ 42. Зная движеніе твердаго тѣла и абсолютное движеніе точки, опредѣлить относительное движеніе ея по отношенію къ этому тѣлу.

Если извѣстно абсолютное движеніе точки M:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)\ \dots\dots\dots \quad (1)$$

и абсолютное движеніе твердаго тѣла или неизмѣняемой среды:

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{ю}} = \varphi_1(t),\ y_{\text{ю}} = \varphi_2(t),\ z_{\text{ю}} = \varphi_3(t) \\ \text{ф} = \Phi_1(t),\ \text{ж} = \Phi_2(t),\ \text{э} = \Phi_3(t) \end{aligned}\right\},\ \dots\dots \quad (85)$$

III-42.

то, чтобы получить функціи $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$, выражающія относительное движеніе точки M, надо взять формулы (46) стр. 56 и подставить въ нихъ: вмѣсто $x, y, z, x_{\text{ю}}, y_{\text{ю}}, z_{\text{ю}}$ — функціи f_1, f_2, f_3 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; вмѣсто λ_x, λ_y . . . . ν_z — ихъ выраженія: (47 — 55) въ тригонометрическихъ функціяхъ угловъ *ф, ж, э*, замѣнивъ послѣдніе функціями Φ_1, Φ_2, Φ_3; вторыя части формулъ (46) будутъ тѣ функціи $\mathfrak{f}_1(t), \mathfrak{f}_2(t)\ \mathfrak{f}_3(t)$, которыя выражаютъ измѣненіе относительныхъ координатъ точки M съ теченіемъ времени.

Примѣръ 19-й. Абсолютное движеніе точки M прямолинейное:

$$x = af(t),\ \ y = bf(t),\ \ z = cf(t);$$

движеніе твердаго тѣла поступательное и всѣ точки его движутся также прямолинейно:

$$x_{\text{ю}} = l + \alpha F(t),\ \ y_{\text{ю}} = m + \beta F(t),\ \ z_{\text{ю}} = n + \gamma F(t).$$

Оси Ξ, Υ, Z мы возьмемъ параллельными неподвижнымъ осямъ. Относительное движеніе точки M выразится равенствами:

$$\xi = af(t) - \alpha F(t) - l$$
$$\eta = bf(t) - \beta F(t) - m$$
$$\zeta = cf(t) - \gamma F(t) - n.$$

Два уравненія траэкторіи относительнаго движенія должны получиться по исключеніи времени изъ этихъ равенствъ; пока неизвѣстенъ видъ функцій f и F, можно получить только одно изъ уравненій траэкторіи, помноживъ первое равенство на $(b\gamma - c\beta)$, второе на $(c\alpha - a\gamma)$, третье на $(a\beta - b\alpha)$, и сложивъ всѣ три; получится уравненіе:

$$(\xi + l)(b\gamma - c\beta) + (\eta + m)(c\alpha - a\gamma) + (\zeta + n)(a\beta - b\alpha) = 0$$

линейное относительно ξ, η, ζ, опредѣляющее нѣкоторую плоскость, неизмѣнно связанную съ тѣломъ; траэкторія относительнаго движенія заключается въ этой плоскости.

Если $F(t) = Af(t) + B$, то траэкторія относительнаго движенія есть прямая линія:

$$\frac{\xi + l + \alpha B}{a - \alpha A} = \frac{\eta + m + \beta B}{b - \beta A} = \frac{\zeta + n + \gamma B}{c - \gamma A}.$$

III-42.

Если $\alpha = ka$, $\beta = kb$, $\gamma = kc$, то траэкторія есть также прямая линія:

$$\frac{\xi + l}{a} = \frac{\eta + m}{b} = \frac{\zeta + n}{c}.$$

Возьмемъ слѣдующій специальный случай:

$$x = 0,\ y = \frac{gt^2}{2},\ z = 0$$

$$x_ю = -\alpha t,\quad y_ю = 0,\quad z_ю = 0.$$

Траэкторія относительнаго движенія будетъ парабола:

$$\xi^2 = \frac{2\alpha^2}{g}\eta,$$

имѣющая вершину въ точкѣ $Ю$ и осью — ось $ЮY$.

Примѣръ 20. Абсолютное движеніе точки M равномѣрно и прямолинейно по оси X, твердое же тѣло равномѣрно вращается вокругъ отрицательной оси Z съ угловою скоростью ω:

$x_ю = y_ю = z_ю = 0$

$$x = at,\ y = 0,\ э = -\omega t.$$

Относительное движеніе выражается равенствами: (§ 40)

$$\xi = at\cos\omega t,\ \eta = at\sin\omega t$$ ф 46 „ 47-55

и траэкторія есть Архимедова спираль:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Примѣръ 21. Абсолютное движеніе точки M совершается по окружности радіуса R:

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t;$$

твердое тѣло совершаетъ поступательное движеніе параллельно плоскости XY, причемъ точка $Ю$ движется по окружности радіуса R_1 и радіусъ векторъ ея $OЮ$ имѣетъ ту же угловую скорость, что и радіусъ векторъ OM:

$$x_ю = R_1\cos(\omega t + \alpha),\ y_ю = R_1\sin(\omega t + \alpha).$$

Относительное движеніе выражается такъ:

$$\xi = D\cos(\omega t - \gamma),\ \eta = D\sin(\omega t - \gamma),$$

III-42.

гдѣ:

$$D = \sqrt{R_1^2 - 2R_1R\cos\alpha + R^2},$$

$$D\cos\gamma = R - R_1\cos\alpha,\ D\sin\gamma = R_1\sin\alpha;$$

то есть относительное движеніе точки M по плоскости $\Xi\Upsilon$ совершается по окружности радіуса D вокругъ точки $Ю$, причемъ радіусъ векторъ $ЮM$ имѣетъ въ относительномъ движеніи ту же угловую скорость вокругъ $Ю$, что и радіусъ векторъ OM вокругъ точки O въ абсолютномъ.

Примѣръ 22-й. Точки M и $Ю$ движутся съ равными скоростями по одной и той же окружности, но въ противоположныя стороны; движеніе тѣла поступательное: § 40

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t,$$

$$x_ю = R\cos(\omega t + \alpha),\ y_ю = -R\sin(\omega t + \alpha).$$ э = 0

Относительное движеніе:

$$\xi = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right),\ \eta = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)$$

совершается вдоль по линіи:

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

наклоненной къ оси Ξ подъ угломъ $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, къ оси Υ — подъ угломъ $\frac{\alpha}{2}$; движеніе точки M по этой линіи происходитъ по слѣдующему закону:

$s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ $$s = 2R\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right),$$

гдѣ s есть разстояніе точки M отъ точки $Ю$.

Примѣръ 23. Твердое тѣло движется поступательно, точки M и $Ю$ описываютъ на плоскости XY эллипсы, главные діаметры которыхъ направлены по осямъ X и Y:

$$x = A\cos\omega t,\ y = B\sin\omega t,$$

$$x_ю = A_1\cos(\omega t + k),\ y_ю = B_1\sin(\omega t + k).$$ э = 0

III-42.

Относительное движеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\xi = a\cos\omega t + \alpha\sin\omega t;\ \eta = b\cos\omega t + \beta\sin\omega t,$$

гдѣ

$$a = A - A_1\cos k,\ \alpha = A_1\sin k$$
$$b = -B_1\sin k,\quad \beta = B - B_1\cos k.$$

На страницѣ 50, въ задачѣ 5-й, были приведены подобныя же выраженія движенія точки; убѣдиться въ томъ, что кривая, описываемая точкою, есть эллипсъ и опредѣлить величины и положенія главныхъ полуосей этого эллипса, предоставляемъ читателю.

Примѣръ 24. Тѣло вращается равномѣрно вокругъ отрицательной оси Z съ угловою скоростью ω. Абсолютное движеніе точки M на плоскости XY совершается по слѣдующему закону: см. т. II стр. 153.

свободное паденіе тѣла на экваторѣ въ первомъ приближеніи;

$$x = b\omega t,\ y = b - \frac{Gt^2}{2},$$

$x_\omega = y_\omega = 0;\ z = -\omega t$

такъ что траэкторія абсолютнаго движенія этой точки есть парабола (черт. 72), вершина которой находится въ точкѣ B (координаты $x = 0$, $y = b$), а ось направлена по BO; скорость абсолютнаго движенія точки M въ точкѣ B направлена параллельно оси X и равна $b\omega$, то есть имѣетъ ту самую величину и то направленіе, которыя она имѣла бы, если бы точка была неизмѣнно связана съ вращающимся твердымъ тѣломъ. Оси Ξ и Υ въ началѣ движенія (въ моментъ $t = o$) возьмемъ совпадающими съ осями X и Y.

При такихъ данныхъ, относительное движеніе точки M по отношенію къ твердому тѣлу выразится такимъ образомъ: (46)

ф. 46

$$\xi = x\lambda_x + y\lambda_y;\quad \eta = x\mu_x + y\mu_y;$$

а такъ какъ: $\psi = 0;\ \varphi = 0;\ \vartheta = \omega t$

ф. 47-55

$$\lambda_x = \cos\omega t,\ \lambda_y = -\sin\omega t,\ \mu_x = \sin\omega t,\ \mu_y = \cos\omega t,$$

то:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= b\omega t\cos\omega t - \left(b - \frac{Gt^2}{2}\right)\sin\omega t\\ \eta &= b\omega t\sin\omega t + \left(b - \frac{Gt^2}{2}\right)\cos\omega t\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (183)$$

По исключеніи изъ этихъ выраженій времени, мы получимъ уравненіе *траэкторіи* относительнаго движенія.

III-42.

Мы разсмотримъ относительное движеніе не на всемъ протяженіи его, но только вблизи его начала.

Имѣя въ виду такое ограниченіе изслѣдованія, мы перенесемъ начало подвижныхъ координатныхъ осей въ точку B_1, находящуюся на прежней оси Υ, въ разстояніи b отъ точки O; новую ось Υ_1 направимъ отъ B_1 къ O, а новую ось Ξ_1 параллельно прежде́й оси Ξ; тогда прежнія координаты ξ, η выразятся въ новыхъ координатахъ ξ_1 η_1 слѣдующимъ образомъ:

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = b - \eta_1;$$

поэтому вмѣсто втораго изъ выраженій (183) можемъ написать слѣдующее выраженіе:

$$\eta_1 = b\,(1 - \cos \omega t - \omega t \sin \omega t) + \frac{Gt^2}{2} \cos \omega t.$$

Затѣмъ, разложивъ косинусъ и синусъ по восходящимъ степенямъ ωt, представимъ выраженія для ξ_1 и η_1 въ видѣ слѣдующихъ рядовъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \left(\frac{G}{2} - \frac{b\omega^2}{3}\right)\omega t^3 - \left(\frac{G}{2} - \frac{b\omega^2}{5}\right)\frac{\omega^3 t^5}{1.2.3} + \ldots \\ \eta_1 &= \left(G - b\omega^2\right)\frac{t^2}{2} - \left(G - \frac{b\omega^2}{2}\right)\frac{\omega^2 t^4}{4} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (184)$$

Мы теперь сдѣлаемъ слѣдующія предположенія относительно величинъ G, ω, b.

Величина b есть весьма большая длина, выражаемая милліонами метровъ; пусть напримѣръ b=6370900 метр., то есть b равно среднему радіусу земнаго шара.

Величина ω есть малая угловая скорость; пусть напримѣръ ω=0,0000729 $\frac{1}{\text{секунда}}$, то есть ω равна угловой скорости суточнаго вращенія земли.

Величина G есть средняя величина ускоренія силы тяжести, то есть

$$G = 9{,}8\ \frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2}.$$

Изъ этихъ цифръ мы найдемъ, что величина $b\omega^2$, входящая въ ряды (184), равна:

$$b\omega^2 = 0{,}03385\ \frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},$$

Ш-42.

и что:

$$\omega^2 = 0,0000000053 \frac{1}{(\text{секунда})^2}$$

$$\omega^3 = 0.00000000000039 \frac{1}{(\text{секунд.})^3}.$$

Если рѣшимся пренебрегать длинами меньшими одной десятой доли миллиметра, то, для первыхъ пятидесяти секундъ отъ начала движенія, мы можемъ пренебречь вторыми и слѣдующими членами рядовъ (184); тогда останется:

$$\xi_1 = \left(\frac{3}{2} G - b\omega^2\right) \frac{\omega t^3}{3}, \eta_1 = \left(G - b\omega^2\right) \frac{t^2}{2} \quad . \; . \; . \; (185)$$

Такъ какъ $b\omega^2$ менѣе G, то изъ этихъ приближенныхъ формулъ видно, что въ первыя секунды движенія точка M, въ относительномъ движеніи по отношенію къ вращающемуся тѣлу, отклоняется въ сторону оси Ξ_1, т.-е. въ сторону вращенія тѣла, и падаетъ по оси Υ равно-ускоренно, съ ускореніемъ: $(G - b\omega^2)$.

По исключеніи времени t изъ равенствъ (185), получимъ уравненіе начальной части траэкторіи относительнаго движенія; уравненіе это есть уравненіе полукубической параболы.

Примѣръ 25. Твердое тѣло вращается какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; абсолютное движеніе точки M начинается изъ той же точки B и съ тою же скоростью $b\omega$ какъ и тамъ, но совершается по закону, выражаемому слѣдующими рядами:

$$\left.\begin{aligned} x &= b\omega t\left(1 - \frac{G}{b}\frac{t^2}{1.2.3} - \ldots\right) \\ y &= b\left(1 - \frac{G}{b}\frac{t^2}{1.2} - \ldots\right) \end{aligned}\right\} \ldots \; (186)$$

дальнѣйшіе члены этихъ рядовъ заключаютъ: вторыя и высшія степени отношенія $(G : b)$, отношеніе $G\omega^2 : b$ и высшія степени его.

Отношеніе $(G : b)$ равняется:

$$\frac{G}{b} = 0,00000153 \frac{1}{(\text{секунд.})^2}.$$

Если будемъ разсматривать движеніе только впродолженіи первыхъ 10—20 секундъ отъ начала его, то можетъ пренебречь третьими и слѣдующими членами рядовъ (186).

Поступивъ такъ, какъ въ прошломъ примѣрѣ, мы найдемъ, что, въ

III-42,43.

продолженіи первыхъ десятковъ секундъ отъ начала движенія, относительное движеніе точки M по отношенію къ вращающемуся тѣлу происходитъ по слѣдующему закону:

$$\xi_1 = \left(G - b\omega^2\right)\frac{\omega t^3}{3};\quad \eta_1 = \left(G - b\omega^2\right)\frac{t^2}{2}\quad \ldots (187)$$

Траэкторія относительнаго движенія есть полукубическая парабола:

$$\xi_1 = \frac{2\omega\sqrt{2}}{3\sqrt{g}}\eta_1^{\frac{3}{2}},\ \text{гдѣ: } g = G - b\omega^2.$$

Движеніе, разсматриваемое въ этомъ примѣрѣ, совершается по отношенію къ вращающейся землѣ тяжелымъ тѣломъ, свободно падающимъ подъ экваторомъ; въ надлежащемъ мѣстѣ нашего курса мы покажемъ, что абсолютное движеніе такого тѣла происходитъ, по законамъ, указаннымъ въ 10-мъ примѣрѣ (стр. 41), по эллипсу, одинъ фокусъ котораго находится въ центрѣ земли O, другой—въ точкѣ O_1 (черт. 73), отстоящей отъ O на длину равную:

$$\frac{2b^2\omega^2}{G}\frac{e}{1-e^2},$$

гдѣ $e = 1 - \frac{b\omega^2}{C}$ есть эксцентриситетъ эллипса; большая же полуось a имѣетъ такую величину, что $a\,(1 + e) = b$, гдѣ b означаетъ величину средняго радіуса земли. Точка B есть точка наименьшей скорости на этомъ эллипсѣ, величина же n (стр. 41) равняется:

$$n = \frac{R^2\omega}{a^2\sqrt{1-e^2}}.$$

§ 43. Скорость относительнаго движенія.

Абсолютное движеніе разсматривается происходящимъ въ неподвижномъ пространствѣ, причемъ положеніе точки въ немъ опредѣляется абсолютными координатами, считаемыми отъ неподвижныхъ плоскостей координатъ; траэкторія абсолютнаго движенія есть кривая неподвижная.

Относительное движеніе по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ разсматривается совершающимся въ этой средѣ, причемъ положеніе точки въ ней опредѣляется относительными ко-

Ш-43.

ординатами, считаемыми отъ плоскостей координатъ, принадлежащихъ средѣ; траэкторія относительнаго движенія есть кривая, неизмѣнно связанная съ движущеюся средою.

Подобная аналогія между разсмотрѣніемъ абсолютнаго и относительнаго движенія можетъ быть продолжена и далѣе; чтобы дать опредѣленія понятій о средней скорости и о скорости въ какой-либо моментъ относительнаго движенія, надо повторить то, что сказано въ §§ 8—12, причемъ слова: «пространство», «неподвижныя оси координатъ», «абсолютныя координаты», «абсолютное движеніе», «траэкторія абсолютнаго движенія», и проч., надо замѣнить, соотвѣтственно, словами: «неизмѣняемая движущаяся среда», «подвижныя оси кординатъ», «относительныя координаты», «относительное движеніе», «траэкторія относительнаго движенія» и проч.; для избѣжанія длинноты повторенія, мы можемъ привести только самыя опредѣленія, безъ объясненій.

Средняя относительная скорость въ пути, пройденномъ точкою M въ неизмѣняемой движущейся средѣ въ теченіи промежутка времени $(t_2—t_1)$ есть отношеніе:

$$\frac{\lambda}{t_2 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (188)$$

между длиною $\bar{\lambda}$ пути, пройденнаго точкою M по траэторіи относительнаго движенія въ теченіи этого промежутка времени и величиною самаго промежутка; отношеніе это имѣетъ всегда величину положительную.

Средняя относительная скорость перемѣщенія точки M по положительному направленію траэкторіи относительнаго движенія въ теченіи промежутка времени $(t_2—t_1)$ есть отношеніе:

$$\frac{\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_1}{t_2 - t_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

въ которомъ $\mathfrak{s}_2$ и $\mathfrak{s}_1$ означаютъ разстоянія, считаемыя, по траэкторіи относительнаго движенія, отъ нѣкоторой начальной точки $\mathfrak{S}_0$ этой кривой до положеній, занимаемыхъ точкою M въ моменты t_2 и t_1; по *одному* направленію траэкторіи разстоянія отъ $\mathfrak{S}_0$ считаются по-

III-43.

ложительными, по противоположному—отрицательными; отношеніе (189) можетъ имѣть положительную или отрицательную величину.

Величина скорости (u) относительнаго движенія точки M въ моментъ t есть предѣлъ, къ которому приближается средняя относительная скорость въ пути, совершаемомъ точкою M въ относительномъ движеніи въ теченіи промежутка времени, начинающагося въ моментъ t, при уменьшеніи промежутка до нуля; **т. е.**

$$u = \text{предѣлу} \left[\frac{\lambda(t+\vartheta, t)}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (190)$$

эта величина всегда положительная.

Предѣлъ, къ которому при этомъ приближается средняя относительная скорость ***перемѣщенія,*** **мы будемъ называть** ***относительною скоростью точки M въ моментъ t по положительному направленію относительной траэкторіи;*** **она равна производной:**

$$\frac{ds}{dt}$$

и можетъ быть положительною или отрицательною, смотря по направленію относительнаго движенія точки въ моментъ t.

Направленіе относительнаго движенія точки M, въ какомъ-либо положеніи ея, совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ траэкторіи относительнаго движенія, проведенной изъ положенія точки M.

Величина скорости u **есть абсолютная величина производной** $\frac{ds}{dt}$, **то есть:**

$$u = +\sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

Производныя:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{f}_1'(t), \; \frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{f}_2'(t), \; \frac{d\zeta}{dt} = \mathfrak{f}_3'(t). \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (191)$$

суть скорости, по положительнымъ направленіямъ осей Ξ, Υ, Z, проэкцій движущейся точки на эти оси.

Ш-ЧН.

§ 44. Проэкціи скорости относительнаго движенія на разныя направленія.

А. Скорость относительнаго движенія измѣряется тѣми же единицами, какъ и скорость абсолютнаго движенія.

Величину скорости u и направленіе относительнаго движенія точки M изображають величиною и направленіемъ длины, проведенной изъ положенія точки M въ направленіи относительнаго движенія (т. е. по направленію касательной къ траэкторіи относительнаго движенія) и заключающей въ себѣ столько единицъ длины и частей ея, сколько въ скорости u заключается единицъ скорости и частей ея.

Эту длину разсматриваютъ какъ изображеніе скорости, приписывая такимъ образомъ скорости относительнаго движенія, нетолько величину, но еще и направленіе; какъ то, такъ и другое означаютъ однимъ и тѣмъ же знакомъ u.

Скорость u, изображенную длиною, можно проэктировать на разныя направленія и плоскости.

Б. *Проэкціи скорости относительнаго движенія на направленія осей координатъ* Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ *равны скоростямъ проэкцій точки* M *на тѣ же оси:* т. е.

$$\left.\begin{aligned} u\cos(u\Xi) &= \frac{d\xi}{dt} \\ u\cos(u\Upsilon) &= \frac{d\eta}{dt} \\ u\cos(u\mathbf{Z}) &= \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (192)$$

Величина скорости u можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$u = +\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2} \qquad (193)$$

В. Такъ какъ ξ, η, ζ суть проэкціи радіуса вектора $\rho = ЮM$ на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, то равенства (192) можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

III-44.

$$\left.\begin{aligned} u\cos(u\Xi) &= \frac{d(\rho\cos(\rho\Xi))}{dt} \\ u\cos(u\Upsilon) &= \frac{d(\rho\cos(\rho\Upsilon))}{dt} \\ u\cos(u\mathbf{Z}) &= \frac{d(\rho\cos(\rho\mathbf{Z}))}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (194)$$

Г. Подобною же формулою выражается проэкція скорости относительнаго движенія на всякое направленіе, неизмѣнно связанное съ движущеюся средою; въ самомъ дѣлѣ, если углы, составляемые направленіемъ П съ осями Ξ, Υ $\mathbf{Z}$, постоянны, то косинусы этихъ угловъ могутъ быть введены подъ знаки производныхъ по времени, а потому:

$$u\cos(u\Xi)\cos(\Pi\Xi) + u\cos(u\Upsilon)\cos(\Pi\Upsilon) + u\cos(u\mathbf{Z})\cos(\Pi\mathbf{Z}) =$$

$$= \frac{d\,[\rho\cos(\rho\Xi)\cos(\Pi\Xi) + \rho\cos(\rho\Upsilon)\cos(\Pi\Upsilon) + \rho\cos(\rho\mathbf{Z})\cos(\Pi\mathbf{Z})]}{dt}$$

то есть:

$$u\cos(u\Pi) = \frac{d(\rho\cos(\rho\Pi))}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (195)$$

Д. Проэкціи скорости относительнаго движенія на неподвижныя оси координатъ X, $У$, Z, выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} u\cos(uX) &= \xi'\lambda_x + \eta'\mu_x + \zeta'\nu_x \\ u\cos(uУ) &= \xi'\lambda_y + \eta'\mu_y + \zeta'\nu_y \\ u\cos(uZ) &= \xi'\lambda_z + \eta'\mu_z + \zeta'\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (196)$$

Е. Если положеніе точки M въ движущейся неизмѣняемой средѣ опредѣляется *относительными сферическими* координатами ρ, f, $\mathfrak{b}$, какъ-то: радіусомъ $ЮM = \rho$, угломъ f, составляемымъ радіусомъ векторомъ $ЮM$ съ осью $Ю\mathbf{Z}$ и угломъ $\mathfrak{b}$, составляемымъ плоскостью $\mathbf{Z}ЮM$ съ плоскостью $\mathbf{Z}Ю\Xi$, то величина скорости относительнаго движенія выразится формулою:

$$u = +\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \rho^2\sin^2 f\left(\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right)^2}, \quad \ldots \quad (197)$$

а проэкціи скорости u на координатныя оси А, В, Г этихъ сферическихъ координатъ выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} u\cos(u\mathrm{A}) &= \frac{d\rho}{dt} \\ u\cos(u\mathrm{B}) &= \rho\frac{df}{dt} \\ u\cos(u\Gamma) &= \rho\sin f\frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (198)$$

§ 45. Годографъ скорости относительнаго движенія.

Для нагляднаго представленія закона, по которому измѣняется величина и направленіе скорости относительнаго движенія, можно построить, въ неизмѣняемой средѣ, годографъ скорости этого движенія.

Для этого надо изъ точки *Ю* или изъ другой точки, принадлежащей неизмѣняемой средѣ, провести радіусъ векторъ *Ю*𝔘, равный и параллельный скорости относительнаго движенія; кривая, которую описываетъ въ неизмѣняемой средѣ конецъ 𝔘 этого радіуса вектора, есть годографъ скорости относительнаго движенія.

§ 46. Зная движеніе неизмѣняемой среды и относительное движеніе точки по отношенію къ этой средѣ, опредѣлить абсолютное движеніе точки.

Если извѣстно движеніе неизмѣняемой среды:

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{ю}} &= \varphi_1(t),\ y_{\text{ю}} = \varphi_2(t),\ z_{\text{ю}} = \varphi_3(t) \\ \text{ф} &= \Phi_1(t),\ \text{ж} = \Phi_2(t),\ \text{э} = \Phi_3(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (85)$$

и относительное движеніе точки по отношенію къ этой средѣ:

$$\xi = \mathfrak{f}_1(t),\ \eta = \mathfrak{f}_2(t),\ \zeta = \mathfrak{f}_3(t), \quad \ldots\ldots (182)$$

то абсолютное движеніе точки M выразится равенствами.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{\text{ю}} + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x \\ y &= y_{\text{ю}} + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y \\ z &= z_{\text{ю}} + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

въ которыхъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, ξ, η, ζ, суть данная функція φ и $\mathfrak{f}$, а косинусы λ_x, λ_y . . . . . ν_z должны быть выражены по формуламъ (47—55) въ функціяхъ Φ.

Примѣръ 26. Неизмѣняемая плоскость $\Xi\Upsilon$ движется въ плоскости XY поступательно такимъ образомъ, что точка $Ю$ движется по оси X по закону:

$$x_ю = f_1(t),\ y_ю = 0,$$

а ось $Ю\Xi$ постоянно совпадаетъ съ направленіемъ оси X.

По оси Υ, перпендикулярной къ оси Ξ, движется точка M по закону:

$$\eta = f_2(t),\ \xi = 0.$$

Абсолютное движеніе точки M по плоскости XY выражается равенствами:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t).$$

Примѣръ 27. Неизмѣняемая плоскость $\Xi\Upsilon$ вращается вокругъ оси OZ по закону:

$$\vartheta = \Phi(t),$$

гдѣ ϑ есть уголъ ΞOX.

Точка M движется по оси Ξ по слѣдующему закону:

$$\eta = 0\ \ \xi = \mathfrak{f}(t).$$

Абсолютное движеніе точки M выражается въ полярныхъ координатахъ ρ и ϑ слѣдующимъ образомъ:

$$\rho = \mathfrak{f}(t),\ \vartheta = \Phi(t);$$

а въ прямоугольныхъ:

$$x = \mathfrak{f}(t)\cos\Phi(t),\ \ y = \mathfrak{f}(t)\sin\Phi(t).$$

Примѣръ 28. Спеціальный случай примѣра 26-го: точка $Ю$ колеблется по оси X по закону:

$$f_1(t) = a\cos\varepsilon t$$

и точка M, въ ея относительномъ движеніи по отношенію къ движущейся плоскости, колеблется по оси Υ по закону:

$$f_2(t) = b\cos(\varepsilon t + \alpha).$$

а проэкціи скорости u на координатныя оси А, В, Г этихъ сферическихъ координатъ выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} u\cos(u\mathrm{A}) &= \frac{d\rho}{dt} \\ u\cos(u\mathrm{B}) &= \rho\frac{df}{dt} \\ u\cos(u\Gamma) &= \rho\sin f\frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (198)$$

§ 45. Годографъ скорости относительнаго движенія.

Для нагляднаго представленія закона, по которому измѣняется величина и направленіе скорости относительнаго движенія, можно построить, въ неизмѣняемой средѣ, годографъ скорости этого движенія.

Для этого надо изъ точки *Ю* или изъ другой точки, принадлежащей неизмѣняемой средѣ, провести радіусъ векторъ *Ю*𝔘, равный и параллельный скорости относительнаго движенія; кривая, которую описываетъ въ неизмѣняемой средѣ конецъ 𝔘 этого радіуса вектора, есть годографъ скорости относительнаго движенія.

§ 46. Зная движеніе неизмѣняемой среды и относительное движеніе точки по отношенію къ этой средѣ, опредѣлить абсолютное движеніе точки.

Если извѣстно движеніе неизмѣняемой среды:

$$\left.\begin{aligned} x_{ю} &= \varphi_1(t),\ y_{ю} = \varphi_2(t),\ z_{ю} = \varphi_3(t) \\ ф &= \Phi_1(t),\ ж = \Phi_2(t),\ э = \Phi_3(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (85)$$

и относительное движеніе точки по отношенію къ этой средѣ:

$$\xi = \mathfrak{f}_1(t),\ \eta = \mathfrak{f}_2(t),\ \zeta = \mathfrak{f}_3(t), \quad \ldots\ldots (182)$$

то абсолютное движеніе точки *М* выразится равенствами.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{ю} + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x \\ y &= y_{ю} + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y \\ z &= z_{ю} + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

въ которыхъ $x_{ю}$, $y_{ю}$, $z_{ю}$, ξ, η, ζ, суть данная функціи φ и $\mathfrak{f}$, а косинусы λ_x, λ_y . . . . . ν_z должны быть выражены по формуламъ (47—55) въ функціяхъ Φ.

Примѣръ 26. Неизмѣняемая плоскость $\Xi\Upsilon$ движется въ плоскости XY поступательно такимъ образомъ, что точка $Ю$ движется по оси X по закону:

$$x_{ю} = f_1(t),\ y_{ю} = 0,$$

а ось $Ю\Xi$ постоянно совпадаетъ съ направленіемъ оси X.

По оси Υ, перпендикулярной къ оси Ξ, движется точка M по закону:

$$\eta = f_2(t),\ \xi = 0.$$

Абсолютное движеніе точки M по плоскости XY выражается равенствами:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t).$$

Примѣръ 27. Неизмѣняемая плоскость $\Xi\Upsilon$ вращается вокругъ оси OZ по закону:

$$\vartheta = \Phi(t),$$

гдѣ ϑ есть уголъ ΞOX.

Точка M движется по оси Ξ по слѣдующему закону:

$$\eta = 0\quad \xi = \mathfrak{f}(t).$$

Абсолютное движеніе точки M выражается въ полярныхъ координатахъ ρ и ϑ слѣдующимъ образомъ:

$$\rho = \mathfrak{f}(t),\ \vartheta = \Phi(t);$$

а въ прямоугольныхъ:

$$x = \mathfrak{f}(t) \cos \Phi(t),\ \ y = \mathfrak{f}(t) \sin \Phi(t).$$

Примѣръ 28. Специальный случай примѣра 26-го: точка $Ю$ колеблется по оси X по закону:

$$f_1(t) = a \cos \varepsilon t$$

и точка M, въ ея относительномъ движеніи по отношенію къ движущейся плоскости, колеблется по оси Υ по закону:

$$f_2(t) = b \cos(\varepsilon t + \alpha).$$

III-46.47.

Въ результатѣ получается абсолютное движенія точки M, совершающееся по эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\cos\alpha\,\frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha.$$

Примѣръ 29. Спеціальный случай примѣра 27-го. Вращеніе плоскости $\Xi\Upsilon$ вокругъ оси OZ совершается равномѣрно, такъ что $\vartheta = \omega t$; точка M, въ относительномъ движеніи по отношенію къ движущейся плоскости, колеблется по оси Ξ и по отрицательному продолженію ея по закону: $\xi = L\cos\omega t$.

Легко найдемъ, что траэкторія абсолютнаго движенія есть окружность:

$$\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{L^2}{4},$$

проходящая черезъ точку O и касающаяся оси Y въ этой точкѣ.

Такихъ примѣровъ можно привести множество.

§ 47. Сѣть, образуемая положеніями траэкторіи относительнаго движенія въ пространствѣ и траэкторіями тѣхъ точекъ неизмѣняемой среды, которыя находятся на относительной траэкторіи.

Не трудно отдать себѣ отчетъ въ томъ, какимъ образомъ точка M, совершающая относительное движеніе по траэкторіи относительнаго движенія, начерченной въ неизмѣняемой средѣ, въ то же время вычерчиваетъ въ пространствѣ траэкторію движенія абсолютнаго.

Пусть $t', t'', t''' \ldots$ суть нѣсколько моментовъ движенія; $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ... — тѣ точки неизмѣняемой среды, съ которыми движущаяся точка M совпадаетъ въ моменты t', t'', t''', ... ; эти точки лежатъ на траэкторіи относительнаго движенія, которая изображена на чертежѣ 74-мъ въ четырехъ различныхъ положеніяхъ, занимаемыхъ ею въ пространствѣ въ моменты t', t'', t''', t''''. Въ каждомъ изъ этихъ положеній мѣста вышеозначенныхъ точекъ отмѣчены буквами $\mathfrak{M}$, съ соотвѣтствующими точкамъ значками внизу и соотвѣтственными моментамъ времени значками вверху; напримѣръ, положенія точекъ въ пространствѣ въ моментъ t'' отмѣчены знаками: $\mathfrak{M}''_1$, $\mathfrak{M}''_2$, $\mathfrak{M}''_3$. Пунктирныя линіи на чертежѣ изображаютъ траэкторіи, описываемыя точками $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$, въ пространствѣ.

III-47.

Въ моментъ t' точка M находится въ совпаденіи съ точкою $\mathfrak{M}_1$ неизмѣняемой среды, а такъ какъ эта точка занимаетъ тогда положеніе $\mathfrak{M}'_1$, то здѣсь, въ этой точкѣ пространства, находится въ этотъ моментъ и точка M; положеніе ея означено знакомъ M'.

Въ теченіи промежутка времени $(t''-t')$ точка M совершитъ относительное движеніе по дугѣ $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ относительной траэкторіи и въ моментъ t'' совпадетъ съ точкою $\mathfrak{M}_2$ неизмѣняемой среды, но эта точка, описавъ въ теченіи того же промежутка времени дугу $\mathfrak{M}'_2\mathfrak{M}''_2$ своей абсолютной траэкторіи, придетъ въ моментъ t'' въ положеніе $\mathfrak{M}''_2$ въ пространствѣ; поэтому, въ этой же точкѣ пространства будетъ находиться въ моментъ t'' и точка M; это положеніе точки M отмѣчено знакомъ M''. Такимъ же точно образомъ мы найдемъ, что въ моментъ t''' точка M будетъ въ пространствѣ въ положеніи M''' и т. д.

Такое построеніе можемъ распространить на болѣе мелкіе промежутки времени и тогда получимъ большее число положеній точки M въ пространствѣ; соединивъ полученныя положенія непрерывною кривою, получимъ траэкторію $M'\,M''\,M'''$ . . . . абсолютнаго движенія точки M.

Взглянувъ на черт. 74-й, мы видимъ, что наше построеніе даетъ намъ въ пространствѣ сѣть, образуемую двумя взаимно пересѣкающимися системами кривыхъ линій; одна система образуется положеніями, принимаемыми въ пространствѣ траэкторіею относительнаго движенія, другая система кривыхъ образуется траэкторіями тѣхъ точекъ неизмѣняемой среды, которыя находятся на траэкторіи относительнаго движенія; каждому моменту времени t соотвѣтствуетъ одна кривая первой системы и одна кривая второй системы; первая представляетъ положеніе относительной траэкторіи въ пространствѣ въ этотъ моментъ, вторая есть траэкторія, описываемая тою точкою неизмѣняемой среды, съ которою въ этотъ моментъ совпадаетъ точка M; на пересѣченіи этой пары кривыхъ линій находится въ моментъ t точка M; траэкторія абсолютнаго движенія, проходя черезъ всѣ такіе узлы сѣти, пересѣкаетъ ее такъ сказать діагонально.

§ 48. Зависимость между скоростями движеній относительнаго и абсолютнаго.

Для опредѣленія соотношенія между скоростью абсолютнаго движенія и скоростью относительнаго движенія точки M, мы возьмемъ производныя по времени отъ равенствъ (45) параграфа 46-го, причемъ мы должны имѣть въ виду, что ξ, η и ζ, будучи координатами точки M, суть функціи времени. Мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} x' &= [\lambda_x\xi' + \mu_x\eta' + \nu_x\zeta'] + [x'_ю + \xi\lambda'_x + \eta\mu'_x + \zeta\nu'_x] \\ y' &= [\lambda_y\xi' + \mu_y\eta' + \nu_y\zeta'] + [y'_ю + \xi\lambda'_y + \eta\mu'_y + \zeta\nu'_y] \\ z' &= [\lambda_z\xi' + \mu_z\eta' + \nu_z\zeta'] + [z'_ю + \xi\lambda'_z + \eta\mu'_z + \zeta\nu'_z] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (199)$$

Вторая часть каждаго изъ этихъ равенствъ состоитъ изъ семи членовъ и изъ нихъ сумма первыхъ трехъ въ каждомъ есть выраженіе проэкціи, на одну изъ неподвижныхъ осей координатъ, скорости относительнаго движенія точки M (см. равенства 196).

Суммы послѣднихъ четырехъ членовъ въ каждомъ изъ равенствъ 199 тождественны со вторыми частями равенствъ (136) (§ 31) и выражаютъ проэкціи на неподвижныя оси координатъ скорости той точки $\mathfrak{M}$ неизмѣняемой среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ времени совпадаетъ точка M; относительныя координаты точки $\mathfrak{M}$ суть постоянныя величины ξ, η, ζ.

Первыя же части равенствъ (199) суть проэкціи, на неподвижныя оси координатъ, скорости v абсолютнаго движенія точки M.

И такъ предъидущія равенства (199) могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(vX) &= u\cos(uX) + w\cos(wX) \\ v\cos(vY) &= u\cos(uY) + w\cos(wY) \\ v\cos(vZ) &= u\cos(uZ) + w\cos(wZ) \end{aligned}\right\}; \quad \ldots \quad (200)$$

отсюда слѣдуетъ (см § 32):

$$\overline{v} = \overline{u} + \overline{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (201)$$

$$\overline{u} = \overline{v} - \overline{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (202)$$

III-48; IV-49.

т. е. скорость абсолютнаго движенія точки M есть геометрическая сумма изъ скорости относительнаго движенія ея по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ и изъ скорости той точки среды, въ которой точка M находится въ разсматриваемый моментъ.

Обратно: *скорость относительнаго движенія точки M по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, движущейся какимъ либо образомъ, есть геометрическая разность между скоростью абсолютнаго движенія точки M и скоростью той точки среды, съ которою точка M въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ.*

Скорость u направлена по касательной къ траэкторіи относительнаго движенія точки (черт. 74), скорость w направлена по касательной къ траэкторіи той точки неизмѣняемой среды, съ которою точка M находится въ совпаденіи въ разсматриваемый моментъ и скорость v направлена по касательной къ траэкторіи абсолютнаго движенія. Скорость v есть діагональ параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ u и w (см. черт. 74).

ГЛАВА IV.

Относительное движеніе неизмѣняемой среды и скорости точекъ ея по отношенію къ другой движущейся неизмѣняемой средѣ.

§ 49. Пусть имѣемъ два неизмѣняемыя тѣла: тѣло I и тѣло II; оба имѣютъ какое либо движеніе въ пространствѣ.

Относительное движеніе тѣла II по отношенію къ тѣлу I есть совокупность относительныхъ движеній точекъ тѣла II по отношенію къ тѣлу I.

Для общности разсмотрѣнія можно представить себѣ, что размѣры обоихъ тѣлъ неограничены, то есть, что имѣемъ, вмѣсто тѣлъ, двѣ движущіяся неизмѣняемыя среды I и II, находящіяся одновременно въ одномъ и томъ же неограниченномъ пространствѣ, такъ что во

IV-49.

всякой точкѣ *m* пространства, во всякій моментъ, находится нѣкоторая точка 𝔐 среды I и нѣкоторая точка *И* среды II *).

Относительное движеніе среды II по отношенію къ средѣ I можетъ быть разсмотрѣно также, какъ было разсмотрѣно въ главѣ II абсолютное движеніе неизмѣняемаго тѣла; причемъ получатся буквально тѣ же самыя теоремы касательно относительнаго движенія неизмѣняемаго тѣла, какія мы получили для абсолютнаго движенія; между прочимъ мы получимъ слѣдующее:

Относительное движеніе среды II по отношенію къ средѣ I можно разсматривать, какъ результатъ соединенія вращательнаго относительнаго движенія среды II, вокругъ какой угодно точки Ю ея, съ относительнымъ поступательнымъ движеніемъ, общимъ съ относительнымъ движеніемъ этой точки Ю.

Скорость в относительнаго движенія всякой точки *И* среды II есть геометрическая сумма, составленная изъ относительной скорости $в_{Ю}$ точки Ю и изъ *относительной вращательной скорости* в точки *И* вокругъ точки Ю; то есть:

$$\bar{в} = \bar{в}_{Ю} + \bar{в} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (203)$$

Точки среды II, находящіяся на нѣкоторой прямой линіи, проходящей черезъ точку Ю, имѣютъ относительныя скорости равныя и параллельныя относительной скорости этой точки; эта линія называется мгновенною осью полюса Ю въ относительномъ движеніи среды II; мы будемъ ее называть *относительною мгновенною осью*.

Отношеніе относительной вращательной скорости в точки *И* вокругъ полюса Ю къ длинѣ кратчайшаго разстоянія *И*Є точки *И* до относительной мгновенной оси полюса Ю есть величина одинаковая для всѣхъ точекъ среды II; мы будемъ называть ее *относительною угловою скоростью* и будемъ обозначать знакомъ Ѡ. Этимъ же знакомъ будемъ обозначать и направленіе мгновенной оси или угловой скорости.

Скорость в направлена перпендикулярно къ плоскости, проведен-

*) Въ этой главѣ точки II-й среды мы будемъ обозначать большими буквами славянскаго алфавита, точки I-й среды—большими буквами нѣмецкаго, а точки пространства—малыми буквами французскаго алфавита.

IV-49.50.

ной черезъ точку *М* и черезъ относительную мгновенную ось полюса Ю.

Относительныя угловыя скорости вокругъ всѣхъ полюсовъ среды равны и параллельны.

Относительная центральная мгновенная ось есть та относительная мгновенная ось среды II, относительныя скорости точекъ которой направлены вдоль по ней.

§ 50. Зависимость между угловыми скоростями движеній относительнаго и абсолютнаго.

Угловая скорость абсолютнаго движенія среды II, вообще говоря, не совпадаетъ съ относительною угловою скоростью ни по величинѣ, ни по направленію; мы опредѣлимъ теперь соотношеніе между этими угловыми скоростями и угловою скоростью абсолютнаго движенія среды I.

Мы условимся обозначать: скорость какой либо точки среды I — буквою *w*, вращательную скорость этой точки вокругъ другой точки той же среды — буквою 𝔴 со значкомъ внизу, опредѣляющимъ полюсъ вращенія среды I. Угловую скорость среды I мы означимъ буквою ω.

Скорость абсолютнаго движенія какой либо точки среды II мы будемъ обозначать буквою *W*, вращательную скорость абсолютнаго движенія этой точки вокругъ другой точки той же среды — буквою 𝔚 со значкомъ внизу, опредѣляющимъ полюсъ вращенія въ абсолютномъ движеніи среды II. Скорость абсолютнаго движенія опредѣленной точки среды II, напримѣръ точки Ю, мы будемъ обозначать буквою *W* съ соотвѣтственнымъ значкомъ внизу, напр. $W_{Ю}$ есть скорость абсолютнаго движенія точки Ю. Угловую скорость абсолютнаго движенія среды II мы означимъ буквою Ω.

Мы позволимъ себѣ, въ видахъ краткости рѣчи, говорить: «относительная скорость», «абсолютная скорость», вмѣсто: «скорость относительнаго движенія», «скорость абсолютнаго движенія»; точно также допустимъ выраженіе: «абсолютная угловая скорость».

Такъ какъ намъ желательно опредѣлить зависимость между угловыми скоростями ω, Ω, 𝔚, то мы возьмемъ полюсы всѣхъ трехъ движеній въ одной и той же точкѣ пространства; а именно: за полюсъ

IV-50.

вращенія въ абсолютномъ движеніи среды I мы возьмемъ ту точку $\mathfrak{O}$ этой среды, которая въ разсматриваемый моментъ находится въ началѣ O неподвижныхъ осей координатъ; за полюсъ вращенія въ абсолютномъ движеніи и также въ относительномъ движеніи среды II мы возьмемъ ту точку $\bigcirc$ этой среды, которая въ этотъ моментъ находится въ томъ же началѣ координатъ вмѣстѣ съ точкою $\mathfrak{O}$.

Мы означимъ знаками W_0 и в_0 абсолютную и относительную скорости точки $\bigcirc$ и знакомъ w_0 — скорость точки $\mathfrak{O}$.

На основаніи теоремы, приведенной въ § 32, на стр. 125:

$$\overline{w} = \overline{w_0} + \overline{\mathfrak{w}_0} \ldots \ldots \ldots \quad (204)$$

$$\overline{W} = \overline{W_0} + \overline{\mathfrak{W}_0}, \ldots \ldots \ldots \quad (205)$$

потому что абсолютная скорость всякой точки среды I есть геометрическая сумма вращательной скорости $\mathfrak{w}_0$ ея вокругъ точки $\mathfrak{O}$ и скорости послѣдней; точно также абсолютная скорость всякой точки среды II есть геометрическая сумма абсолютной вращательной скорости $\mathfrak{W}_0$ ея вокругъ точки $\bigcirc$ и абсолютной скорости послѣдней.

На основаніи же равенства (203) относительная скорость всякой точки среды II есть геометрическая сумма относительной вращательной скорости $\mathfrak{в}_0$ ея вокругъ точки $\bigcirc$ и относительной скорости послѣдней, т. е.:

$$\overline{\text{в}} = \overline{\text{в}_0} + \overline{\mathfrak{в}_0} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (206)$$

Равенства 205 и 206 мы примѣнимъ къ какой либо точкѣ M среды II, а равенство 204 къ той точкѣ $\mathfrak{M}$ среды I, которая совпадаетъ съ M.

На основаніи доказанной въ § 48 зависимости между скоростями абсолютнаго и относительнаго движеній точки, мы имѣемъ право утверждать слѣдующее:

Абсолютная скорость всякой точки среды II есть геометрическая сумма относительной скорости ея по отношенію къ средѣ I и скорости той точки среды I, которая съ ней совпадаетъ, или:

относительная скорость всякой точки среды II въ относитель-

IV-50.

номъ движеніи ея по отношенію къ средѣ I есть геометрическая разность между абсолютною скоростью этой точки и абсолютною скоростью совпадающей съ нею точки 1-й среды.

Примѣняя это къ точкѣ M, совпадающей съ точкою $\mathfrak{M}$, и къ точкѣ O, совпадающей съ точкою $\mathfrak{O}$, мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\bar{\text{к}} = \bar{W} - \bar{w}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (207)$$

$$\bar{\text{в}}_0 = \bar{W}_0 - \bar{w}_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (208)$$

Изъ равенствъ (206—208) слѣдуетъ:

$$\bar{W} - \bar{w} = \bar{W}_0 - \bar{w}_0 + \bar{\text{в}}_0,$$

или

$$\bar{W} - \bar{W}_0 = \bar{w} - \bar{w}_0 + \bar{\text{в}}_0;$$

а отсюда, на основаніи равенствъ (204) и (205), получимъ слѣдующее соотношеніе между вращательными скоростями:

$$\bar{\mathfrak{W}}_0 = \bar{\mathfrak{w}}_0 + \bar{\text{в}}_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (209)$$

Это символическое равенство, которое послужитъ намъ для опредѣленія соотношенія между угловыми скоростями, выражаетъ, что $\mathfrak{W}_0$ есть діагональ параллелограмма, построеннаго на $\mathfrak{w}_0$ и в_0.

Всѣ эти три скорости суть вращательныя скорости вокругъ соотвѣтственныхъ трехъ мгновенныхъ осей $O\Omega$, $O\omega$ и $O\mathfrak{W}$, проходящихъ черезъ одну и ту же точку O; значитъ величины ихъ, по формулѣ 99 стр. 90, равны:

$$\mathfrak{W}_0 = \Omega \mathfrak{r} \sin(\Omega \mathfrak{r}),\; \mathfrak{w}_0 = \omega \mathfrak{r} \sin(\omega \mathfrak{r}),\; \text{в}_0 = \mathfrak{W} \mathfrak{r} \sin(\mathfrak{W} \mathfrak{r}),$$

гдѣ $\mathfrak{r}$ означаетъ величину и направленіе радіуса вектора, проведеннаго изъ точки O къ совпадающимъ точкамъ M и $\mathfrak{M}$.

Направленія этихъ скоростей опредѣлятся по правилу параграфа 26: скорость $\mathfrak{W}_0$ перпендикулярна къ плоскости, проведенной черезъ $\mathfrak{r}$ и Ω, и направлена слѣва на право для наблюдателя, стоя-

щаго ногами въ O, головою по направленію угловой скорости Ω, и смотрящаго на точку M ($\mathfrak{M}$); подобнымъ же образомъ опредѣляются направленія и другихъ двухъ скоростей.

Если скорости $\mathfrak{w}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ направлены по одной прямой, то скорость $\mathfrak{W}_0$ будетъ равна ихъ суммѣ или разности, смотря потому, будутъ ли имѣть $\mathfrak{w}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ одинаковыя или прямопротивоположныя направленія.

Это будетъ для такихъ точекъ M' ($\mathfrak{M}'$), которыя находятся въ плоскости, заключающей обѣ мгновенныя оси $O\omega$ и $O\mathfrak{W}$, потому что тогда обѣ скорости $\mathfrak{w}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ будутъ перпендикулярны къ этой плоскости QQ (черт. 75).

Къ этой же плоскости будетъ перпендикулярна и скорость $\mathfrak{W}_0$ точки M' и въ ней, слѣдовательно, должна заключаться мгновенная ось $O\Omega$.

И такъ *всѣ три мгновенныя оси* $O\Omega$, $O\omega$ и $O\mathfrak{W}$ *заключаются въ одной плоскости.*

Для точекъ плоскости QQ, заключающихся внутри угла $\omega O\mathfrak{W}$ и внутри противолежащаго ему угла между продолженіями тѣхъ же осей, скорости $\mathfrak{w}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ имѣютъ прямо-противоположныя направленія. Внутри этого угла слѣдуетъ искать тѣ точки, скорости которыхъ $\mathfrak{w}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ равны и прямопротивоположны; такъ какъ скорости $\mathfrak{W}_0$ такихъ точекъ равны нулю, то онѣ находятся на мгновенной оси $O\Omega$.

Пусть M_1 ($\mathfrak{M}_1$) (черт. 76) есть одна изъ такихъ точекъ; для нея $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{v}_0$, то есть:

$$\mathfrak{r}_1 \omega \sin(\omega \mathfrak{r}_1) = \mathfrak{r}_1 \mathfrak{W} \sin(\mathfrak{W} \mathfrak{r}_1),$$

гдѣ $\mathfrak{r}_1$ означаетъ величину и направленіе радіуса вектора OM_1 этой точки.

Такъ какъ направленіе $O\Omega$ совпадаетъ съ направленіемъ OM_1 то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ:

$$\frac{\sin(\omega\Omega)}{\mathfrak{w}} = \frac{\sin(\mathfrak{w}\Omega)}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (210)$$

Этимъ опредѣляется направленіе Ω.

IY-5г.

Чтобы опредѣлить величину $\mathfrak{Q}$, мы возьмемъ точку $M_2(\mathfrak{M}_2)$, находящуюся на игновенной оси $O\omega$ (черт. 77); вращательная скорость $\mathfrak{w}_0$ точки $\mathfrak{M}_2$, совпадающей съ точкою M_2, равна нулю, поэтому здѣсь скорость $\mathfrak{B}_0$ равняется скорости $\mathfrak{b}_0$, то есть:

$$\mathfrak{r}_2\mathfrak{Q}\sin(\mathfrak{r}_2\mathfrak{Q}) = \mathfrak{r}_2\mathfrak{W}\sin(\mathfrak{r}_2\mathfrak{W}),$$

гдѣ $\mathfrak{r}_2$ есть величина и направленіе радіуса вектора OM_2; а такъ какъ онъ совпадаетъ съ осью $O\omega$, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ:

$$\frac{\sin(\omega\mathfrak{Q})}{\mathfrak{W}} = \frac{\sin(\omega\mathfrak{W})}{\mathfrak{Q}}.$$

Присоединивъ сюда предыдущее равенство 210, мы получимъ формулы:

$$\frac{\sin(\omega\mathfrak{W})}{\mathfrak{Q}} = \frac{\sin(\omega\mathfrak{Q})}{\mathfrak{W}} = \frac{\sin(\mathfrak{W}\mathfrak{Q})}{\omega}, \quad \ldots\ldots \quad (211)$$

на основаніи которыхъ мы можемъ опредѣлить величину и положеніе угловой скорости $\mathfrak{Q}$ по величинамъ и направленіямъ другихъ двухъ угловыхъ скоростей при помощи одного изъ слѣдующихъ построеній: Если изъ конца a (черт. 78) длины Oa, изображающей угловую скорость ω, провести длину aA, равную и параллельную угловой скорости $\mathfrak{W}$, и затѣмъ соединить O съ A, то получится треугольникъ OaA, въ которомъ, на основаніи равенствъ (211), сторона OA будетъ равна $\mathfrak{Q}$ и будетъ составлять со сторонами Oa и aA тѣ же самые углы, какіе составляетъ $\mathfrak{Q}$ съ угловыми скоростями ω и $\mathfrak{W}$.

Или можно построить на сторонахъ ω и $\mathfrak{W}$ параллелограммъ, діагональ котораго будетъ представлять величину и направленіе угловой скорости $\mathfrak{Q}$.

И такъ *угловая скорость абсолютнаго движенія среды II есть геометрическая сумма угловой скорости абсолютнаго движенія среды I и угловой скорости относительнаго движенія среды II по отношенію къ средѣ I*:

$$\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\omega} + \overline{\mathfrak{W}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (212)$$

IV-50.51.

Угловая скорость относительнаго движенія среды II по отношенію къ средѣ I есть геометрическая разность между угловыми скоростями абсолютнаго движенія средъ II и I:

$$\overline{W} = \overline{\Omega} - \overline{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots (213)$$

Для примѣра представимъ себѣ, что среда I, имѣющая неподвижную точку $\mathfrak{O}$, вращается равномѣрно съ угловой скоростью ω вокругъ положительной оси Z и что твердое тѣло II, имѣющее неподвижную точку O, совпадающую съ точкою $\mathfrak{O}$, движется въ пространствѣ, какъ указано въ примѣрѣ 15, а именно: абсолютная угловая скорость его Ω имѣетъ постоянную величину, составляетъ постоянный уголъ β съ осью Z, а плоскость, проходящая черезъ мгновенную ось $O\Omega$ и черезъ ось OZ, равномѣрно вращается вмѣстѣ со средою I вокругъ оси Z.

Легко видѣть, что относительное движеніе тѣла II по отношенію къ средѣ I будетъ равномѣрное вращеніе съ угловою скоростью ω_1, равною геометрической разности угловыхъ скоростей Ω и ω, вокругъ оси OZ, неизмѣнно связанной съ I-ю средою; это видно даже изъ сравненія равенствъ (121) стр. 106 съ равенствами (211).

Примѣчаніе. *Доказанная въ настоящемъ параграфѣ зависимость между угловыми скоростями справедлива не только тогда, когда среды I и II имѣютъ вращательное движеніе вокругъ общей неподвижной точки, но и при какихъ бы то ни было абсолютныхъ движеніяхъ средъ I и II.*

§ 51. Зависимость между положеніями центральныхъ осей.

Если центральная ось абсолютнаго движенія среды II не совпадаетъ съ центральною осью среды I, то спрашивается, какое положеніе, по отношенію къ нимъ, занимаетъ центральная ось относительнаго движенія среды II по отношенію къ средѣ I? Разсмотрѣніемъ этого мы займемся въ настоящемъ параграфѣ.

Пусть $c\omega$ есть положеніе, занимаемое въ пространствѣ центральною осью движенія среды I, gW — положеніе, занимаемое въ пространствѣ центральною осью относительнаго движенія среды II по отношенію къ

IY-5c.

Чтобы опредѣлить величину $\mathfrak{Q}$, мы возьмемъ точку $M_2 (\mathfrak{M}_2)$, находящуюся на мгновенной оси $O\omega$ (черт. 77); вращательная скорость $\mathfrak{w}_0$ точки $\mathfrak{M}_2$, совпадающей съ точкою M_2, равна нулю, поэтому здѣсь скорость $\mathfrak{B}_0$ равняется скорости $\mathfrak{v}_0$, то есть:

$$\mathfrak{r}_2 \mathfrak{Q} \sin(\mathfrak{r}_2 \mathfrak{Q}) = \mathfrak{r}_2 \mathfrak{W} \sin(\mathfrak{r}_2 \mathfrak{W}),$$

гдѣ $\mathfrak{r}_2$ есть величина и направленіе радіуса вектора OM_2; а такъ какъ онъ совпадаетъ съ осью $O\omega$, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ:

$$\frac{\sin(\omega \mathfrak{Q})}{\mathfrak{W}} = \frac{\sin(\omega \mathfrak{W})}{\mathfrak{Q}}.$$

Присоединивъ сюда предыдущее равенство 210, мы получимъ формулы:

$$\frac{\sin(\omega \mathfrak{W})}{\mathfrak{Q}} = \frac{\sin(\omega \mathfrak{Q})}{\mathfrak{W}} = \frac{\sin(\mathfrak{W} \mathfrak{Q})}{\omega}, \quad \ldots\ldots \quad (211)$$

на основаніи которыхъ мы можемъ опредѣлить величину и положеніе угловой скорости $\mathfrak{Q}$ по величинамъ и направленіямъ другихъ двухъ угловыхъ скоростей при помощи одного изъ слѣдующихъ построеній: Если изъ конца a (черт. 78) длины Oa, изображающей угловую скорость ω, провести длину aA, равную и параллельную угловой скорости $\mathfrak{W}$, и затѣмъ соединить O съ A, то получится треугольникъ OaA, въ которомъ, на основаніи равенствъ (211). сторона OA будетъ равна $\mathfrak{Q}$ и будетъ составлять со сторонами Oa и aA тѣ же самые углы, какіе составляетъ $\mathfrak{Q}$ съ угловыми скоростями ω и $\mathfrak{W}$.

Или можно построить на сторонахъ ω и $\mathfrak{W}$ параллелограммъ, діагональ котораго будетъ представлять величину и направленіе угловой скорости $\mathfrak{Q}$.

И такъ *угловая скорость абсолютнаго движенія среды II есть геометрическая сумма угловой скорости абсолютнаго движенія среды I и угловой скорости относительнаго движенія среды II по отношенію къ средѣ I*:

$$\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\omega} + \overline{\mathfrak{W}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (212)$$

IV-51.

И такъ должно быть:

$$\text{б}_g \sin(\mathfrak{W}\Omega) + \mathfrak{W}(D - x)\cos(\mathfrak{W}\Omega) = w_c \sin(\omega\Omega) + \omega x \cos(\omega\Omega),$$

откуда:

$$x = \frac{D\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Omega) + L}{\omega\cos(\omega\Omega) + \mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}\Omega)},$$

гдѣ

$$L = \text{б}_g \sin(\mathfrak{W}\Omega) - w_c \sin(\omega\Omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (215)$$

Такъ какъ:

$$\Omega = \omega\cos(\omega\Omega) + \mathfrak{W}\cos(\mathfrak{W}\Omega), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (216)$$

потому что Ω есть геометрическая сумма остальныхъ угловыхъ скоростей, то:

$$x\Omega = D\mathfrak{W}\cos(\mathfrak{W}\Omega) + L \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (217)$$

$$(D - x)\Omega = D\omega\cos(\omega\Omega) - L \quad . \; . \; . \; . \; . \; (218)$$

Этими формулами опредѣляется положеніе той точки i, въ которой центральная ось $i\Omega$ абсолютнаго движенія II-й среды пересѣкаетъ кратчайшее разстояніе cg.

Величина абсолютной скорости W_i точекъ II-й среды, находящихся на центральной оси $i\Omega$, равняется проэкціи на эту ось четырехъ вышесказанныхъ скоростей:

$$W_i = w_c \cos(\omega\Omega) + \text{б}_g \cos(\mathfrak{W}\Omega) - x\omega\sin(\omega\Omega) -$$
$$-(D - x)\mathfrak{W}\sin(\mathfrak{W}\Omega);$$

въ этомъ выраженіи сократится x, такъ какъ:

$$\omega\sin(\omega\Omega) = \mathfrak{W}\sin(\mathfrak{W}\Omega);$$

получится же слѣдующее выраженіе:

$$W_i = w_c \cos(\omega\Omega) + \text{б}_g \cos(\mathfrak{W}\Omega) - D\omega\sin(\omega\Omega) \quad . \; . \; (219)$$

Формулы эти значительно упрощаются въ тѣхъ случаяхъ, когда скорости w_c и б_g равны нулю, то есть, когда центральныя оси $c\omega$ и $g\mathfrak{w}$ суть мгновенныя оси простыхъ вращеній. Тогда положеніе точки i опредѣляется *формулою:*

$$\frac{\overline{ic}}{\overline{gi}} = \frac{\mathfrak{W}\cos(\mathfrak{W}\Omega)}{\omega\cos(\omega\Omega)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (220)$$

а величина скорости W_i — формулою:

$$W_i = -D\omega\sin(\omega\Omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (221)$$

§ 52. Абсолютныя движенія обѣихъ средъ совершаются параллельно одной неподвижной плоскости. Зависимость между положеніями мгновенныхъ центровъ движеній абсолютныхъ и относительнаго.

Если абсолютныя движенія средъ I и II параллельны одной и той же неподвижной плоскости, то и относительное движеніе среды II по отношенію къ средѣ I параллельно той же плоскости.

Такое относительное движеніе имѣетъ, въ каждый моментъ времени, относительную угловую скорость, перпендикулярную къ неподвижной плоскости, и относительный мгновенный центръ g на этой плоскости.

Пусть c и i суть мѣста на той же плоскости мгновенныхъ центровъ абсолютныхъ движеній средъ I и II.

Неподвижную плоскость мы примемъ за плоскость XY; угловыя скорости всѣхъ трехъ движеній будутъ тогда параллельны оси Z, но каждая изъ нихъ можетъ имѣть направленіе положительной или отрицательной оси Z; для того, чтобы вывести сразу общее правило, мы условимся подразумѣвать подъ ω, $\mathfrak{W}$ и Ω *проэкціи угловыхъ скоростей на положительное направленіе оси* Z, абсолютныя же величины этихъ угловыхъ скоростей мы будемъ обозначать тѣми же буквами въ скобкахъ: (ω), $(\mathfrak{W})$, (Ω). Послѣднія суть величины всегда положительныя, а первыя: ω, $\mathfrak{W}$ и Ω суть величины положительныя тогда, когда эти угловыя скорости направлены параллельно положительной оси Z; такъ, напримѣръ: если ω и $\mathfrak{W}$ направлены параллельно положительной оси Z, то $\omega = +(\omega)$, $\mathfrak{W} = +(\mathfrak{W})$; если ω направлено параллельно положительной оси Z, а $\mathfrak{W}$ — параллельно отрицательной оси Z, то $\omega = +(\omega)$, $\mathfrak{W} = -(\mathfrak{W})$, и т. д.

Въ результатѣ получается абсолютное движенія точки M, совершающееся по эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\cos\alpha\,\frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha.$$

Примѣръ 29. Спеціальный случай примѣра 27-го. Вращеніе плоскости $\Xi\Upsilon$ вокругъ оси OZ совершается равномѣрно, такъ что $\vartheta = \omega t$; точка M, въ относительномъ движеніи по отношенію къ движущейся плоскости, колеблется по оси Ξ и по отрицательному продолженію ея по закону: $\xi = L\cos\omega t$.

Легко найдемъ, что траэкторія абсолютнаго движенія есть окружность:

$$\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{L^2}{4},$$

проходящая черезъ точку O и касающаяся оси Y въ этой точкѣ.

Такихъ примѣровъ можно привести множество.

§ 47. Сѣть, образуемая положеніями траэкторіи относительнаго движенія въ пространствѣ и траэкторіями тѣхъ точекъ неизмѣняемой среды, которыя находятся на относительной траэкторіи.

Не трудно отдать себѣ отчетъ въ томъ, какимъ образомъ точка M, совершающая относительное движеніе по траэкторіи относительнаго движенія, начерченной въ неизмѣняемой средѣ, въ то же время вычерчиваетъ въ пространствѣ траэкторію движенія абсолютнаго.

Пусть t', t'', t''' . . . суть нѣсколько моментовъ движенія; $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ... — тѣ точки неизмѣняемой среды, съ которыми движущаяся точка M совпадаетъ въ моменты t', t'', t''', ... ; эти точки лежатъ на траэкторіи относительнаго движенія, которая изображена на чертежѣ 74-мъ въ четырехъ различныхъ положеніяхъ, занимаемыхъ ею въ пространствѣ въ моменты t', t'', t''', t''''. Въ каждомъ изъ этихъ положеній мѣста вышеозначенныхъ точекъ отмѣчены буквами $\mathfrak{M}$, съ соотвѣтствующими точкамъ значками внизу и соотвѣтственными моментамъ времени значками вверху; напримѣръ, положенія точекъ въ пространствѣ въ моментъ t'' отмѣчены знаками: $\mathfrak{M}''_1, \mathfrak{M}''_2, \mathfrak{M}''_3$. Пунктирныя линіи на чертежѣ изображаютъ траэкторіи, описываемыя точками $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$, въ пространствѣ.

III-47.

Въ моментъ t' точка M находится въ совпаденіи съ точкою $\mathfrak{M}_1$ неизмѣняемой среды, а такъ какъ эта точка занимаетъ тогда положеніе $\mathfrak{M}'_1$, то здѣсь, въ этой точкѣ пространства, находится въ этотъ моментъ и точка M; положеніе ея означено знакомъ M'.

Въ теченіи промежутка времени $(t''—t')$ точка M совершитъ относительное движеніе по дугѣ $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ относительной траэкторіи и въ моментъ t'' совпадетъ съ точкою $\mathfrak{M}_2$ неизмѣняемой среды, но эта точка, описавъ въ теченіи того же промежутка времени дугу $\mathfrak{M}'_2\mathfrak{M}''_2$ своей абсолютной траэкторіи, придетъ въ моментъ t'' въ положеніе $\mathfrak{M}''_2$ въ пространствѣ; поэтому, въ этой же точкѣ пространства будетъ находиться въ моментъ t'' и точка M; это положеніе точки M отмѣчено знакомъ M''. Такимъ же точно образомъ мы найдемъ, что въ моментъ t''' точка M будетъ въ пространствѣ въ положеніи M''' и т. д.

Такое построеніе можемъ распространить на болѣе мелкіе промежутки времени и тогда получимъ большее число положеній точки M въ пространствѣ; соединивъ полученныя положенія непрерывною кривою, получимъ траэкторію $M' M'' M'''$ . . . . абсолютнаго движенія точки M.

Взглянувъ на черт. 74-й, мы видимъ, что наше построеніе даетъ намъ въ пространствѣ сѣть, образуемую двумя взаимно пересѣкающимися системами кривыхъ линій; одна система образуется положеніями, принимаемыми въ пространствѣ траэкторіею относительнаго движенія, другая система кривыхъ образуется траэкторіями тѣхъ точекъ неизмѣняемой среды, которыя находятся на траэкторіи относительнаго движенія; каждому моменту времени t соотвѣтствуетъ одна кривая первой системы и одна кривая второй системы; первая представляетъ положеніе относительной траэкторіи въ пространствѣ въ этотъ моментъ, вторая есть траэкторія, описываемая тою точкою неизмѣняемой среды, съ которою въ этотъ моментъ совпадаетъ точка M; на пересѣченіи этой пары кривыхъ линій находится въ моментъ t точка M; траэкторія абсолютнаго движенія, проходя черезъ всѣ такіе узлы сѣти, пересѣкаетъ ее такъ сказать діагонально.

III-48.

§ 48. Зависимость между скоростями движеній относительнаго и абсолютнаго.

Для опредѣленія соотношенія между скоростью абсолютнаго движенія и скоростью относительнаго движенія точки M, мы возьмемъ производныя по времени отъ равенствъ (45) параграфа 46-го, причемъ мы должны имѣть въ виду, что ξ, η и ζ, будучи координатами точки M, суть функціи времени. Мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left[\lambda_x \xi' + \mu_x \eta' + \nu_x \zeta'\right] + \left[x'_ю + \xi \lambda'_x + \eta \mu'_x + \zeta \nu'_x\right] \\ y' &= \left[\lambda_y \xi' + \mu_y \eta' + \nu_y \zeta'\right] + \left[y'_ю + \xi \lambda'_y + \eta \mu'_y + \zeta \nu'_y\right] \\ z' &= \left[\lambda_z \xi' + \mu_z \eta' + \nu_z \zeta'\right] + \left[z'_ю + \xi \lambda'_z + \eta \mu'_z + \zeta \nu'_z\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (199)$$

Вторая часть каждаго изъ этихъ равенствъ состоитъ изъ семи членовъ и изъ нихъ сумма первыхъ трехъ въ каждомъ есть выраженіе проэкціи, на одну изъ неподвижныхъ осей координатъ, скорости u относительнаго движенія точки M (см. равенства 196).

Суммы послѣднихъ четырехъ членовъ въ каждомъ изъ равенствъ 199 тождественны со вторыми частями равенствъ (136) (§ 31) и выражаютъ проэкціи на неподвижныя оси координатъ скорости w той точки $\mathfrak{M}$ неизмѣняемой среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ времени совпадаетъ точка M; относительныя координаты точки $\mathfrak{M}$ суть постоянныя величины ξ, η, ζ.

(см. Также § 37)

Первыя же части равенствъ (199) суть проэкціи, на неподвижныя оси координатъ, скорости v абсолютнаго движенія точки M.

И такъ предъидущія равенства (199) могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(vX) &= u\cos(uX) + w\cos(wX) \\ v\cos(vY) &= u\cos(uY) + w\cos(wY) \\ v\cos(vZ) &= u\cos(uZ) + w\cos(wZ) \end{aligned}\right\}; \quad . \; . \quad (200)$$

отсюда слѣдуетъ (см § 32):

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (201)$$

$$\bar{u} = \bar{v} - \bar{w} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (202)$$

III-48; IV-49.

т. е. скорость абсолютнаго движенія точки M есть геометрическая сумма изъ скорости относительнаго движенія ея по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ и изъ скорости той точки среды, въ которой точка M находится въ разсматриваемый моментъ.

Обратно: ***скорость относительнаго движенія точки M по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, движущейся какимъ либо образомъ, есть геометрическая разность между скоростью абсолютнаго движенія точки M и скоростью той точки среды, съ которою точка M въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ.***

Скорость u направлена по касательной къ траэкторіи относительнаго движенія точки (черт. 74), скорость w направлена по касательной къ траэкторіи той точки неизмѣняемой среды, съ которою точка M находится въ совпаденіи въ разсматриваемый моментъ и скорость v направлена по касательной къ траэкторіи абсолютнаго движенія. Скорость v есть діагональ параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ u и w (см. черт. 74).

ГЛАВА IV.

Относительное движеніе неизмѣняемой среды и скорости точекъ ея по отношенію къ другой движущейся неизмѣняемой средѣ.

§ 49. Пусть имѣемъ два неизмѣняемыя тѣла: тѣло I и тѣло II; оба имѣютъ какое либо движеніе въ пространствѣ.

Относительное движеніе тѣла II по отношенію къ тѣлу I есть совокупность относительныхъ движеній точекъ тѣла II по отношенію къ тѣлу I.

Для общности разсмотрѣнія можно представить себѣ, что размѣры обоихъ тѣлъ неограничены, то есть, что имѣемъ, вмѣсто тѣлъ, двѣ движущіяся неизмѣняемыя среды I и II, находящіяся одновременно въ одномъ и томъ же неограниченномъ пространствѣ, такъ что во

IV-49.

всякой точкѣ *m* пространства, во всякій моментъ, находится нѣкоторая точка $\mathfrak{M}$ среды I и нѣкоторая точка *М* среды II *).

Относительное движеніе среды II по отношенію къ средѣ I можетъ быть разсмотрѣно также, какъ было разсмотрѣно въ главѣ II абсолютное движеніе неизмѣняемаго тѣла; причемъ получатся буквально тѣ же самыя теоремы касательно относительнаго движенія неизмѣняемаго тѣла, какія мы получили для абсолютнаго движенія; между прочимъ мы получимъ слѣдующее:

Относительное движеніе среды II по отношенію къ средѣ I можно разсматривать, какъ результатъ соединенія вращательнаго относительнаго движенія среды II, вокругъ какой угодно точки Ю ея, съ относительнымъ поступательнымъ движеніемъ, общимъ съ относительнымъ движеніемъ этой точки Ю.

Скорость б относительнаго движенія всякой точки *М* среды II есть геометрическая сумма, составленная изъ относительной скорости $б_{Ю}$ точки Ю и изъ *относительной вращательной скорости* в точки *М* вокругъ точки Ю; то есть:

$$\overline{б} = \overline{б_{Ю}} + \overline{в} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (203)$$

Точки среды II, находящіяся на нѣкоторой прямой линіи, проходящей черезъ точку Ю, имѣютъ относительныя скорости равныя и параллельныя относительной скорости этой точки; эта линія называется мгновенною осью полюса Ю въ относительномъ движеніи среды II; мы будемъ ее называть *относительною мгновенною осью*.

Отношеніе относительной вращательной скорости в точки *М* вокругъ полюса Ю къ длинѣ кратчайшаго разстоянія *МС* точки *М* до относительной мгновенной оси полюса Ю есть величина одинаковая для всѣхъ точекъ среды II; мы будемъ называть ее *относительною угловою скоростью* и будемъ обозначать знакомъ Ѡ. Этимъ же знакомъ будемъ обозначать и направленіе мгновенной оси или угловой скорости.

Скорость в направлена перпендикулярно къ плоскости, проведен-

*) Въ этой главѣ точки II-й среды мы будемъ обозначать большими буквами славянскаго алфавита, точки I-й среды—большими буквами нѣмецкаго, а точки пространства—малыми буквами французскаго алфавита.

IV-49.50.

ной черезъ точку *И* и черезъ относительную мгновенную ось полюса Ю.

Относительныя угловыя скорости вокругъ всѣхъ полюсовъ среды равны и параллельны.

Относительная центральная мгновенная ось есть та относительная мгновенная ось среды II, относительныя скорости точекъ которой направлены вдоль по ней.

§ 50. Зависимость между угловыми скоростями движеній относительнаго и абсолютнаго.

Угловая скорость абсолютнаго движенія среды II, вообще говоря, не совпадаетъ съ относительною угловою скоростью ни по величинѣ, ни по направленію; мы опредѣлимъ теперь соотношеніе между этими угловыми скоростями и угловою скоростью абсолютнаго движенія среды I.

Мы условимся обозначать: скорость какой либо точки среды I — буквою *w*, вращательную скорость этой точки вокругъ другой точки той же среды — буквою 𝔴 со значкомъ внизу, опредѣляющимъ полюсъ вращенія среды I. Угловую скорость среды I мы означимъ буквою ω.

Скорость абсолютнаго движенія какой либо точки среды II мы будемъ обозначать буквою *W*, вращательную скорость абсолютнаго движенія этой точки вокругъ другой точки той же среды — буквою 𝔚 со значкомъ внизу, опредѣляющимъ полюсъ вращенія въ абсолютномъ движеніи среды II. Скорость абсолютнаго движенія опредѣленной точки среды II, напримѣръ точки Ю, мы будемъ обозначать буквою *W* съ соотвѣтственнымъ значкомъ внизу, напр. $W_{Ю}$ есть скорость абсолютнаго движенія точки Ю. Угловую скорость абсолютнаго движенія среды II мы означимъ буквою Ω.

Мы позволимъ себѣ, въ видахъ краткости рѣчи, говорить: «относительная скорость», «абсолютная скорость», вмѣсто: «скорость относительнаго движенія», «скорость абсолютнаго движенія»; точно также допустимъ выраженіе: «абсолютная угловая скорость».

Такъ какъ намъ желательно опредѣлить зависимость между угловыми скоростями ω, Ω, 𝔚, то мы возьмемъ полюсы всѣхъ трехъ движеній въ одной и той же точкѣ пространства; а именно: за полюсъ

Ṽ-54.55.

тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью *У* касательными къ точкамъ этихъ кривыхъ, выражаются формулами:

$$tg(kУ) = \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}} = \mathfrak{a}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{b}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = \mathfrak{a}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Траэкторіи эти, смотря по величинѣ и знаку отношенія $\alpha:\beta$, могутъ имѣть различный характеръ.

Если α и β имѣютъ одинаковые знаки, то всѣ кривыя проходятъ черезъ начало координатъ.

При $\alpha=\beta$ всѣ онѣ суть прямыя линіи, проходящія черезъ начало координатъ.

При $\frac{\alpha}{\beta}>1$ всѣ кривыя касаются оси *У* въ началѣ координатъ, такъ какъ при $\mathfrak{x}=0$ или $\mathfrak{y}=0$ послѣдняя формула даетъ $tg(kУ)=0$, если только $\frac{\alpha}{\beta}>1$. Всѣ кривыя, направляясь въ безконечность, приближаются къ параллельности съ осью *X*. Общій характеръ траэкторій для $\frac{\alpha}{\beta}>1$ таковъ, какъ на чертежѣ 88, гдѣ представлены траэкторіи для $\frac{\alpha}{\beta}=2$

При $\frac{\beta}{\alpha}>1$ всѣ кривыя касаются въ началѣ координатъ къ оси *X* и направляются въ безконечность параллельно оси *У*; общій характеръ подобенъ изображенному на чертежѣ 89.

Кривыя не проходятъ черезъ начало координатъ, если α и β имѣютъ различные знаки, онѣ ассимптотически приближаются къ осямъ координатъ, подобно системѣ равнобочныхъ гиперболъ, представленной на чертежѣ 90.

§ 55. Зная движеніе измѣняемой среды и абсолютное движеніе точки, опредѣлить относительное движеніе ея по отношенію къ этой средѣ.

Знаніе относительнаго движенія точки *M* по отношенію къ движущейся измѣняемой средѣ должно состоять въ томъ, чтобы мы могли указать, съ какою точкою среды совпадаетъ точка *M* въ любой моментъ движенія.

Если намъ извѣстно движеніе нѣкоторой измѣняемой среды, выраженное формулами (227), и абсолютное движеніе точки *M*, выраженное формулами (1) стр. 6, то мы можемъ опредѣлить относительное движеніе точки *M*

по отношенію къ этой средѣ, то есть мы можемъ опредѣлить: начальныя координаты $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ той точки $\mathfrak{m}_0$ среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ $t=0$ (начальный), начальныя координаты $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ той точки $\mathfrak{m}_1$ среды, съ которою M совпадаетъ въ моментъ $t=t'$ и вообще начальныя координаты $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{b}_\tau$, $\mathfrak{c}_\tau$ той точки $\mathfrak{m}_\tau$ среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ $t=\tau$.

Величины $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{b}_\tau$, $\mathfrak{c}_\tau$ опредѣлятся изъ нижеслѣдующихъ равенствъ, выражающихъ, что въ моментъ τ координаты точки M равняются координатамъ точки $\mathfrak{m}_\tau$.

$$\left.\begin{aligned} f_1(\tau) &= \mathfrak{F}_1(\mathfrak{a}_\tau, \mathfrak{b}_\tau, \mathfrak{c}_\tau, \tau) \\ f_2(\tau) &= \mathfrak{F}_2(\mathfrak{a}_\tau, \mathfrak{b}_\tau, \mathfrak{c}_\tau, \tau) \\ f_3(\tau) &= \mathfrak{F}_3(\mathfrak{a}_\tau, \mathfrak{b}_\tau, \mathfrak{c}_\tau, \tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (231)$$

Величины $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{b}_\tau$, $\mathfrak{c}_\tau$ опредѣлятся изъ этихъ равенствъ въ функціяхъ τ:

$$\mathfrak{a}_\tau = \varphi_1(\tau),\ \mathfrak{b}_\tau = \varphi_2(\tau),\ \mathfrak{c}_\tau = \varphi_3(\tau)\ \ldots\ldots (232)$$

Эти выраженія примѣнимы ко всякому моменту движенія и могутъ быть разсматриваемы какъ *выраженія относительнаго движенія*; по исключеніи изъ нихъ времени τ, мы получимъ два уравненія кривой линіи, соединяющей начальныя положенія всѣхъ точекъ среды, черезъ которыя пройдетъ точка M во время движенія; эта кривая представляетъ *положеніе, которое имѣетъ въ моментъ* $t=0$ *траэкторія относительнаго движенія точки* M.

Пояснимъ сказанное примѣромъ.

Примѣръ 34. Движеніе среды совершается, какъ указано въ примѣрѣ 30-мъ, абсолютное же движеніе точки M происходитъ равномѣрно по прямой линіи AD (черт. 91) и весь путь совершается ею въ теченіи времени T, такъ что движеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

$$x = a\left(2\frac{t}{T} - 1\right),\ y = (x + a)\frac{b}{a},\ z = 0,$$

гдѣ $2b = \overline{CD}$.

Въ этомъ случаѣ равенства (231) получатъ слѣдующій видъ:

$$a\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right) = \mathfrak{a},\ (\mathfrak{a} + a)\frac{b}{a} = \mathfrak{b} + B\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{a}}{a}\right)^2\right)\tau,\ \mathfrak{c} = 0. (233)$$

Ӯ-55.56.

Изъ нихъ получимъ выраженія (232), которыя здѣсь будутъ слѣдующія: координаты въ моментъ $t=0$

$$\mathfrak{a} = a\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right), \; \mathfrak{b} = 2\frac{\tau}{T}\left(b - 2B\tau\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\right), \; \mathfrak{c} = 0.$$

той точки среды, которая въ моментъ $t=\tau$ имѣетъ координаты $= f_1(\tau) = a$; $b = f_2(\tau) = b + B[1-(\frac{a}{a})^2]\tau = b + 4B\frac{\tau}{T}(1-\frac{\tau}{T})$; $c = \tau$.

По исключеніи изъ нихъ, или лучше прямо изъ равенствъ (233), времени τ, мы получимъ слѣдующее уравненіе траэкторіи относительнаго движенія въ начальномъ положеніи:

$$\mathfrak{b} = \left(1 + \frac{\mathfrak{a}}{a}\right)\left\{b - \frac{BT}{2}\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{a}}{a}\right)^2\right)\right\}. \; . \; . \; .$$

движение точки D въ моментъ $t=0$.

На чертежѣ 91 линія A 1° 2° 3° 4° 5° D изображаетъ эту кривую для того случая, когда $BT = \frac{3}{2}b$.

§ 56. Сѣть, образуемая положеніями въ пространствѣ траэкторіи относительнаго движенія и траэкторіями тѣхъ точекъ среды, которыя находятся на относительной траэкторіи.

Траэкторія относительнаго движенія есть кривая измѣняемаго вида, движущаяся и деформирующаяся вмѣстѣ со средою; въ предыдущемъ § мы показали, какъ составить уравненія положенія ея въ начальный моментъ, теперь мы покажемъ, какъ составить уравненія положенія ея въ какой либо моментъ t движенія.

Во всякій моментъ t относительная траэкторія образуется тѣми же точками $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_\tau, \ldots$ среды, по которымъ она проходитъ въ моментъ $t=0$; движеніе же этихъ точекъ опредѣлится по формуламъ (227), если въ нихъ подставить начальныя координаты этихъ точекъ; такъ движеніе точки $\mathfrak{m}_\tau$ выразится слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{F}_1(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), t) \\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{F}_2(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), t) \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{F}_3(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), t) \end{aligned}\right\} , \; . \; . \; . \; . \; (234)$$

если въ нихъ разсматривать τ — какъ величену постоянную, а t — какъ переменную; по исключеніи времени t изъ нихъ, мы получимъ два уравненія:

$$\Theta_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \tau) = 0, \; \Theta_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \tau) = 0 \; , \; . \; . \; . \; . \; (235)$$

траэкторіи, описываемой точкою $\mathfrak{m}_\tau$.

Если, оставивъ въ равенствахъ (234) t постояннымъ, будемъ давать τ различныя значенія отъ $\tau=0$, соотвѣтсвующаго началу движенія, до τ, соотвѣтствующаго концу его, то эти равенства будутъ давать намъ координаты, которыя имѣютъ въ моментъ t различныя точки $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, ... $\mathfrak{m}_\tau$ ..... среды, находящіяся на траэкторіи относительнаго движенія; исключивъ, поэтому, величину τ изъ равенствъ (234), мы должны будемъ получить уравненія кривой линіи, проходящей черезъ такія положенія всѣхъ этихъ точекъ; это и будутъ уравненія:

$$\Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)=0,\ \Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)=0,\ \dots \quad (236)$$

положенія, занимаемаго траэкторіею относительнаго движенія въ моментъ t.

Самыя же равенства (234), при постоянномъ t и перемѣнномъ τ, выражаютъ то абсолютное движеніе, которое имѣла бы точка M, если бы среда оставалась неподвижно и неизмѣнно въ томъ самомъ положеніи, которое она имѣетъ въ моментъ t при дѣйствительномъ движеніи ея, и если бы притомъ точка M вполнѣ сохранила свое относительное движеніе, то есть если бы она совмѣщалась, въ этомъ предполагаемомъ движеніи, со всякою изъ точекъ $\mathfrak{m}_\tau$ въ тотъ самый моментъ τ, въ который она совмѣщается съ нею въ дѣйствительномъ движеніи.

Такимъ образомъ выходитъ, что равенства (234) имѣютъ двойное значеніе.

Если дать τ какое либо постоянное значеніе, то равенства (234) будутъ выражать движеніе той точки $\mathfrak{m}_\tau$ среды, съ которою совмѣщается точка M въ моментъ τ; уравненія (235) выражаютъ траекторію этой точки $\mathfrak{m}_\tau$.

Если дать t какое либо постоянное значеніе, то равенства (234) будутъ выражать движеніе, которое совершила бы точка M, если бы она сохранила свое относительное движеніе по отношенію къ средѣ, приведенной съ самаго начала движенія въ неподвижное положеніе— тождественное съ тѣмъ, которое среда эта имѣетъ въ моментъ t движенія ея; уравненія (236) выражаютъ траэкторію, которую описала бы точка M при этомъ движеніи; эта кривая представляетъ положеніе, занимаемое траэкторіею относительнаго движенія въ моментъ t.

Каждому моменту τ соотвѣтствуетъ кривая (235) и каждому моменту t соотвѣтсвуетъ кривая (236).

Если давать τ въ уравненіяхъ (235) всѣ значенія отъ $\tau=0$ до $\tau=T$

IV-52; V-53.

Другіе случаи того же рода представлены схематически на чертежахъ 84, 85, 86.

Если угловыя скорости ω и $\mathfrak{W}$ имѣютъ противоположные знаки и равныя абсолютныя величины, то предыдущія формулы даютъ $\Omega=0$ и положеніе точки i въ безконечности; можно непосредственно показать, что въ этомъ случаѣ абсолютныя скорости всѣхъ точекъ среды II имѣютъ равныя величины и направленія, перпендикулярныя къ линіи cg.

Въ этомъ случаѣ треугольникъ $\mathcal{M}\mathfrak{v}\mathfrak{V}$ (черт. 87), образуемый скоростями $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$ всякой точки $\mathcal{M}$, подобенъ треугольнику $g\mathcal{M}c$ и сходственныя стороны ихъ взаимно-перпендикулярны; дѣйствительно: скорость $\mathfrak{v}$ равна произведенію $(\mathfrak{W})\overline{\mathcal{M}g}$ и перпендикулярна къ $\overline{\mathcal{M}g}$, а скорость $\mathfrak{w}$ равна произведенію $(\omega)\overline{\mathcal{M}c}$ и перпендикулярна къ $\overline{\mathcal{M}c}$, поэтому уголъ $\mathfrak{V}\mathfrak{v}\mathcal{M}$ равенъ углу $c\mathcal{M}g$ и прилежащія къ этимъ угламъ стороны находятся въ пропорціи:

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}\mathfrak{v}}}{\overline{c\mathcal{M}}}=\frac{\overline{\mathcal{M}\mathfrak{v}}}{\overline{g\mathcal{M}}}=(\omega)=(\mathfrak{W});$$

слѣдовательно, также и сторона $\overline{\mathcal{M}\mathfrak{V}}$ перпендикулярна къ сторонѣ $\overline{gc}$, а отношеніе ихъ длинъ находится въ той же пропорціи, поэтому:

$$\mathfrak{V}=(\omega)\overline{gc} \quad \dots\dots\dots \quad (226)$$

ГЛАВА V.

Относительное движеніе точки по отношенію къ движущейся измѣняемой средѣ.

§ 53. Представимъ себѣ движущуюся измѣняемую среду, которая деформируется при движеніи какимъ бы то ни было образомъ, съ соблюденіемъ однако того условія, чтобы всякая непрерывная линія, проведенная въ какой либо моментъ движенія черезъ точки среды, оставалась непрерывною-же во все время движенія.

V-53.54.

Въ то время, какъ среда эта деформируется и движется въ пространствѣ, въ немъ совершаетъ абсолютное движеніе нѣкоторая точка M, посторонняя средѣ.

Относительное движеніе точки M по отношенію къ измѣняемой средѣ есть переходъ ея черезъ точки среды, совершающійся, съ теченіемъ времени, послѣдовательно и непрерывно.

Линія, проведенная черезъ всѣ тѣ точки среды, съ которыми точка M совпадаетъ при движеніи, есть *траэкторія относительнаго движенія точки M по отношенію къ измѣняемой средѣ.* Если представить себѣ, что эта кривая проведена до начала движенія, то, во время самаго движенія среды, она не только будетъ измѣнять свое положеніе въ пространствѣ, но также и свой видъ, потому что среда, точки которой образуютъ эту линію, деформируется.

§ 54. Аналитическое выраженіе движенія измѣняемой среды. Траэкторіи точекъ ея.

Точки измѣняемой среды мы условимся обозначать малыми буквами нѣмецкаго готическаго алфавита, напримѣръ: $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$,...

Абсолютныя координаты этихъ точекъ будемъ обозначать буквами: $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ того же алфавита; значки внизу, съ правой стороны буквъ, будутъ показывать, какой именно точкѣ среды принадлежатъ координаты; напримѣръ: $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ суть координаты точки $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$—координаты точки $\mathfrak{m}_2$, и т. д.

Абсолютныя координаты этихъ-же точекъ въ нѣкоторый моментъ t_0, который мы можемъ принять за начальную эпоху, мы будемъ обозначать буквами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ со значками, соотвѣтствующими точкамъ; напримѣръ: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ суть координаты точки $\mathfrak{m}_1$ въ моментъ t_0, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ — координаты точки $\mathfrak{m}_2$ въ тотъ-же моментъ t_0; мы будемъ называть эти координаты *начальными координатами* точекъ системы, самый моментъ — *начальнымъ моментомъ движенія среды.*

Движеніе измѣняемой среды будетъ намъ извѣстно, если имѣемъ возможность перейдти отъ начальныхъ координатъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ всякой точки среды къ координатамъ ея $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ въ любой моментъ времени; для этого необходимо, чтобы $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ были выражены извѣстными намъ функціями начальныхъ координатъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и времени $(t - t_0)$:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \mathfrak{F}_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t - t_0)\\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{F}_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t - t_0)\\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{F}_3(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t - t_0)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (227)$$

Большею частью будемъ полагать: $t_0 = 0$.

Эти три равенства аналитически выражаютъ движенiе всей среды. Чтобы получить движенiе опредѣленной точки ($\mathfrak{m}_1$) среды, надо подставить начальныя координаты ея ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$) въ эти выраженiя; по исключенiи изъ нихъ времени t или $(t-t_0)$, мы получимъ два уравненiя траэкторiи, описываемой точкою $\mathfrak{m}_1$ въ пространствѣ.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ движенiй измѣняемой среды, выраженныхъ подобными формулами.

Примѣръ 30. Движущаяся среда заключается между двумя параллельными плоскостями: $x = +a$ и $x = -a$, такъ что по направленiю оси X среда имѣетъ толщину $2a$, въ прочихъ же измѣренiяхъ размѣры среды безпредѣльны.

Движенiе среды совершается слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}, \mathfrak{y} = \mathfrak{b} + B\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{a^2}\right)t, \mathfrak{z} = \mathfrak{c}; \quad \ldots \quad (228)$$

то есть точки среды совершаютъ движенiя по линiямъ, параллельнымъ оси Y, притомъ различныя точки, находящiяся на одной линiи перпендикулярной къ плоскости XY, совершаютъ одинаковое движенiе. Каждая точка движется равномѣрно со скоростью

$$B\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{a^2}\right),$$

величина которой зависитъ отъ разстоянiя $\mathfrak{a}$ точки до плоскости YZ; наибольшею скоростью B обладаютъ точки среды, находящiяся въ этой плоскости; точки же, находящiяся въ плоскостяхъ $x = \pm a$, неподвижны.

Примѣръ 31. Движущаяся среда заключается между двумя круговыми цилиндрическими поверхностями, имѣющими общую ось; внутренняя поверхность имѣетъ радiусъ R_2, наружная — R_1.

Движенiе точекъ среды происходитъ по слѣдующему закону:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^0 + C\frac{(R^2_2 - R^2_1)\,\mathfrak{r}^2 \log \mathfrak{r}^2 + (\mathfrak{r}^2 - R^2_2)R^2_1 \log R^2_1 + (R^2_1 - \mathfrak{r}^2)R^2_2 \log R^2_2}{\mathfrak{r}(R^2_2 - R^2_1)}\,t.$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^0, \; \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^0,$$

V-54.

гдѣ $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{z}$ суть кругово-цилиндрическія координаты какой-либо точки среды въ моментъ t, а $\mathfrak{r}^0$, $\mathfrak{v}^0$, $\mathfrak{z}^0$ — такія же координаты этой точки въ начальный моментъ.

Примѣръ 32. Движущаяся среда заключается внутри круговой цилиндрической поверхности радіуса R; всѣ точки движутся параллельно оси поверхности, такъ что координаты $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ или $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{v}$ остаются постоянными; законъ движенія слѣдующій:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^0,\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}^0,\ \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^0 + at + C\left(1 - \frac{\mathfrak{r}^2}{R^2}\right)t.$$

Здѣсь наименьшую скорость имѣютъ тѣ точки среды, которыя находятся на самой поверхности, наибольшую—точки, находящіяся на оси поверхности; первыя имѣютъ скорость a, послѣднія $(a+C)$.

Примѣръ 33. Среда безгранична по всѣмъ направленіямъ; движеніе ея совершается по слѣдующему закону:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}e^{\alpha t},\ \mathfrak{y} = \mathfrak{b}e^{\beta t},\ \mathfrak{z} = \mathfrak{c}e^{\gamma t}, \quad \dots\dots \quad (229)$$

гдѣ α, β, γ суть величины постоянныя.

По исключеніи времени изъ этихъ равенствъ, мы получимъ уравненія:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{b}}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{c}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \dots\dots\dots \quad (230)$$

обращающіяся въ уравненія траэкторіи какой угодно точки среды, если въ нихъ вмѣсто $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ подставить начальныя координаты этой точки.

Каковы бы ни были коэфиціэнты α, β, γ, но если они конечны, то изъ равенствъ (229) и (230) видно слѣдующее:

Точка среды, находящаяся въ началѣ координатъ, остается въ покоѣ.

Точки среды, находящіяся на осяхъ координатъ въ началѣ движенія, остаются на нихъ во время движенія; каждая такая точка движется по своей оси, которая ей служитъ траэкторіею.

Точки среды, находящіяся въ плоскостяхъ координатъ въ началѣ движенія, не выходятъ изъ своихъ плоскостей и во время движенія; напримѣръ: если $\mathfrak{c} = 0$, то $\mathfrak{z} = 0$ для всякаго t.

Траекторіи точекъ, находящихся въ плоскости XY, выражаются уравненіемъ:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{b}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}};$$

Ỹ-54.55.

тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью У касательными къ точкамъ этихъ кривыхъ, выражаются формулами:

$$\operatorname{tg}(kУ) = \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}} = \mathfrak{a}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{b}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = \mathfrak{a}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Траэкторіи эти, смотря по величинѣ и знаку отношенія $\alpha:\beta$, могутъ имѣть различный характеръ.

Если α и β имѣютъ одинаковые знаки, то всѣ кривыя проходятъ черезъ начало координатъ.

При $\alpha=\beta$ всѣ онѣ суть прямыя линіи, проходящія черезъ начало координатъ.

При $\frac{\alpha}{\beta}>1$ всѣ кривыя касаются оси $У$ въ началѣ координатъ, такъ какъ при $\mathfrak{x}=0$ или $\mathfrak{y}=0$ послѣдняя формула даетъ $tg(kУ)=0$, если только $\frac{\alpha}{\beta}>1$. Всѣ кривыя, направляясь въ безконечность, приближаются къ параллельности съ осью X. Общій характеръ траэкторій для $\frac{\alpha}{\beta}>1$ таковъ, какъ на чертежѣ 88, гдѣ представлены траэкторіи для $\frac{\alpha}{\beta}=2$

При $\frac{\beta}{\alpha}>1$ всѣ кривыя касаются въ началѣ координатъ къ оси X и направляются въ безконечность параллельно оси $У$; общій характеръ подобенъ изображенному на чертежѣ 89.

Кривыя не проходятъ черезъ начало координатъ, если α и β имѣютъ различные знаки, онѣ ассимптотически приближаются къ осямъ координатъ, подобно системѣ равнобочныхъ гиперболъ, представленной на чертежѣ 90.

§ 55. Зная движеніе измѣняемой среды и абсолютное движеніе точки, опредѣлить относительное движеніе ея по отношенію къ этой средѣ.

Знаніе относительнаго движенія точки M по отношенію къ движущейся измѣняемой средѣ должно состоять въ томъ, чтобы мы могли указать, съ какою точкою среды совпадаетъ точка M въ любой моментъ движенія.

Если намъ извѣстно движеніе нѣкоторой измѣняемой среды, выраженное формулами (227), и абсолютное движеніе точки M, выраженное формулами (1) стр. 6, то мы можемъ опредѣлить относительное движеніе точки M

по отношенію къ этой средѣ, то есть мы можемъ опредѣлить: начальныя координаты $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ той точки $\mathfrak{m}_0$ среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ $t=0$ (начальный), начальныя координаты $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ той точки $\mathfrak{m}_1$ среды, съ которою M совпадаетъ въ моментъ $t=t'$ и вообще начальныя координаты $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{b}_\tau$, $\mathfrak{c}_\tau$ той точки $\mathfrak{m}_\tau$ среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ $t=\tau$.

Величины $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{b}_\tau$, $\mathfrak{c}_\tau$ опредѣлятся изъ нижеслѣдующихъ равенствъ, выражающихъ, что въ моментъ τ координаты точки M равняются координатамъ точки $\mathfrak{m}_\tau$.

$$\left.\begin{aligned} f_1(\tau) &= \mathfrak{F}_1(\mathfrak{a}_\tau, \mathfrak{b}_\tau, \mathfrak{c}_\tau, \tau) \\ f_2(\tau) &= \mathfrak{F}_2(\mathfrak{a}_\tau, \mathfrak{b}_\tau, \mathfrak{c}_\tau, \tau) \\ f_3(\tau) &= \mathfrak{F}_3(\mathfrak{a}_\tau, \mathfrak{b}_\tau, \mathfrak{c}_\tau, \tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (231)$$

Величины $\mathfrak{a}_\tau$, $\mathfrak{b}_\tau$, $\mathfrak{c}_\tau$ опредѣлятся изъ этихъ равенствъ въ функціяхъ τ:

$$\mathfrak{a}_\tau = \varphi_1(\tau),\ \mathfrak{b}_\tau = \varphi_2(\tau),\ \mathfrak{c}_\tau = \varphi_3(\tau) \quad \ldots\ldots \quad (232)$$

Эти выраженія примѣнимы ко всякому моменту движенія и могутъ быть разсматриваемы какъ *выраженія относительнаго движенія*; по исключеніи изъ нихъ времени τ, мы получимъ два уравненія кривой линіи, соединяющей начальныя положенія всѣхъ точекъ среды, черезъ которыя пройдетъ точка M во время движенія; эта кривая представляетъ *положеніе, которое имѣетъ въ моментъ* $t=0$ *траэкторія относительнаго движенія точки M.*

Пояснимъ сказанное примѣромъ.

Примѣръ 34. Движеніе среды совершается, какъ указано въ примѣрѣ 30-мъ, абсолютное же движеніе точки M происходитъ равномѣрно по прямой линіи AD (черт. 91) и весь путь совершается ею въ теченіи времени T, такъ что движеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

$$x = a\left(2\frac{t}{T} - 1\right),\ y = (x + a)\frac{b}{a},\ z = 0,$$

гдѣ $2b = \overline{CD}$.

Въ этомъ случаѣ равенства (231) получатъ слѣдующій видъ:

$$a\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right) = \mathfrak{a},\ (\mathfrak{a} + a)\frac{b}{a} = \mathfrak{b} + B\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{a}}{a}\right)^2\right)\tau,\ \mathfrak{c} = 0. \quad (233)$$

Изъ нихъ получимъ выраженія (232), которыя здѣсь будутъ слѣдующія: *координаты въ моментъ τ=0*

$$\mathfrak{a} = a\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right),\ \mathfrak{b} = 2\frac{\tau}{T}\left(b - 2B\tau\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\right),\ \mathfrak{c} = 0.$$

По исключеніи изъ нихъ, или лучше прямо изъ равенствъ (233), времени τ, мы получимъ слѣдующее уравненіе траэкторіи относительнаго движенія въ начальномъ положеніи:

$$\mathfrak{b} = \left(1 + \frac{\mathfrak{a}}{a}\right)\left\{b - \frac{BT}{2}\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{a}}{a}\right)^2\right)\right\}. \ . \ . \ .$$

На чертежѣ 91 линія $A\ 1^0 \cdot 2^0\ 3^0\ 4^0\ 5^0\ D$ изображаетъ эту кривую для того случая, когда $BT = \frac{3}{2}b$.

§ 56. Сѣть, образуемая положеніями въ пространствѣ траэкторіи относительнаго движенія и траэкторіями тѣхъ точекъ среды, которыя находятся на относительной траэкторіи.

Траэкторія относительнаго движенія есть кривая измѣняемаго вида, движущаяся и деформирующаяся вмѣстѣ со средою; въ предыдущемъ § мы показали, какъ составить уравненія положенія ея въ начальный моментъ, теперь мы покажемъ, какъ составить уравненія положенія ея въ какой либо моментъ t движенія.

Во всякій моментъ t относительная траэкторія образуется тѣми же точками $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$.....$\mathfrak{m}_\tau$, ... среды, по которымъ она проходитъ въ моментъ $t = 0$; движеніе же этихъ точекъ опредѣлится по формуламъ (227), если въ нихъ подставить начальныя координаты этихъ точекъ; такъ движеніе точки $\mathfrak{m}_\tau$ выразится слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{F}_1(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), t) \\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{F}_2(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), t) \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{F}_3(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), t) \end{aligned}\right\} \ , \ . \ . \ . \ . \ (234)$$

если въ нихъ разсматривать τ — какъ величену постоянную, а t — какъ переменную; по исключеніи времени t изъ нихъ, мы получимъ два уравненія:

$$\Theta_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \tau) = 0,\ \Theta_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \tau) = 0\ ,\ . \ . \ . \ . \ (235)$$

траэкторіи, описываемой точкою $\mathfrak{m}_\tau$.

V-56

Если, оставивъ въ равенствахъ (234) t постояннымъ, будемъ давать τ различныя значенія отъ $\tau = 0$, соотвѣтсвующаго началу движенія, до τ, соотвѣтствующаго концу его, то эти равенства будутъ давать намъ координаты, которыя имѣютъ въ моментъ t различныя точки $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, ... $\mathfrak{m}_\tau$ ..... среды, находящіяся на траэкторіи относительнаго движенія; исключивъ, поэтому, величину τ изъ равенствъ (234), мы должны будемъ получить уравненія кривой линіи, проходящей черезъ такія положенія всѣхъ этихъ точекъ; это и будутъ уравненія:

$$\Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0, \; \Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0, \; . \; . \; . \; . \; (236)$$

положенія, занимаемаго траэкторіею относительнаго движенія въ моментъ t.

Самыя же равенства (234), при постоянномъ t и перемѣнномъ τ, выражаютъ то абсолютное движеніе, которое имѣла бы точка M, если бы среда оставалась неподвижно и неизмѣнно въ томъ самомъ положеніи, которое она имѣетъ въ моментъ t при дѣйствительномъ движеніи ея, и если бы притомъ точка M вполнѣ сохранила свое относительное движеніе, то есть если бы она совмѣщалась, въ этомъ предполагаемомъ движеніи, со всякою изъ точекъ $\mathfrak{m}_\tau$ въ тотъ самый моментъ τ, въ который она совмѣщается съ нею въ дѣйствительномъ движеніи.

Такимъ образомъ выходитъ, что равенства (234) имѣютъ двойное значеніе.

Если дать τ какое либо постоянное значеніе, то равенства (234) будутъ выражать движеніе той точки $\mathfrak{m}_\tau$ среды, съ которою совмѣщается точка M въ моментъ τ; уравненія (235) выражаютъ траекторію этой точки $\mathfrak{m}_\tau$.

Если дать t какое либо постоянное значеніе, то равенства (234) будутъ выражать движеніе, которое совершила бы точка M, если бы она сохранила свое относительное движеніе по отношенію къ средѣ, приведенной съ самаго начала движенія въ неподвижное положеніе— тождественное съ тѣмъ, которое среда эта имѣетъ въ моментъ t движенія ея; уравненія (236) выражаютъ траэкторію, которую описала бы точка M при этомъ движеніи; эта кривая представляетъ положеніе, занимаемое траэкторіею относительнаго движенія въ моментъ t.

Каждому моменту τ соотвѣтствуетъ кривая (235) и каждому моменту t соотвѣтсвуетъ кривая (236).

Если давать τ въ уравненіяхъ (235) всѣ значенія отъ $\tau = 0$ до $\tau = T$

Ỹ-56.

(гдѣ T есть моментъ конца всего движенія), то получимъ уравненія *системы безчисленнаго множества траэкторій, описываемыхъ всьми точками среды, чрезъ которыя точка М проходитъ при движеніи.*

Если давать t въ уравненіяхъ (236) всѣ значенія отъ $t=0$ до $t=T$, то получимъ уравненія *системы безчисленнаго множества кривыхъ линій, представляющихъ положенія относительной траэкторіи въ пространствѣ.*

Пусть t', t'', t''', t'''' . . . суть нѣсколько моментовъ движенія; $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_4$, . . . —тѣ точки измѣняемой среды, съ которыми въ эти моменты совмѣщается точка M,

$\mathfrak{m}'_1$, $\mathfrak{m}'_2$, $\mathfrak{m}'_3$, ... (черт. 92) — положенія, занимаемыя ими въ моментъ t'

$\mathfrak{m}''_1$, $\mathfrak{m}''_2$, $\mathfrak{m}''_3$, ... (черт. 92) — положенія, занимаемыя ими въ моментъ t''

$\mathfrak{m}_1'''$, $\mathfrak{m}_2'''$, $\mathfrak{m}_3'''$, . . . (черт. 92) — положенія, занимаемыя ими въ моментъ t'''

. . . .

На чертежѣ (92) проведены черезъ эти точки двѣ системы кривыхъ линій; пунктирныя линіи суть траэкторіи, описываемыя точками $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$, . . . ; линіи же, проведенныя сплошною тонкою чертою, суть положенія, занимаемыя траэкторіею относительнаго движенія въ моменты t', t'', t''', ...

Въ моментъ t' точка M находится въ положеніи M', гдѣ она совпадаетъ съ точкою $\mathfrak{m}_1$, находящеюся въ положеніи $\mathfrak{m}'_1$; въ теченіи промежутка времени $(t''-t')$ точка M проходитъ послѣдовательно черезъ точки среды, образующія часть относительной траэкторіи, заключающуюся между точками $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$; въ моментъ t'' точка M совмѣстится съ точкою $\mathfrak{m}_2$, которая, описавъ въ теченіи промежутка времени $(t''-t')$ дугу $\mathfrak{m}_2' \mathfrak{m}_2''$ своей траэкторіи, придетъ въ моментъ t'' въ положеніе $\mathfrak{m}_2''$; здѣсь, въ положеніи M'', будетъ находиться и точка M въ этотъ моментъ. Въ моменты t''', t'''' . . . точка M будетъ въ положеніяхъ M''', M'''', ...

Изъ чертежа 92 видно, что траэкторія абсолютнаго движенія проходитъ діагонально черезъ узловыя точки сѣти, образуемой двумя системами кривыхъ линій.

Кривыя одной системы суть траэкторіи тѣхъ точекъ среды, съ которыми точка M совмѣщается при движеніи.

Кривыя другой системы суть положенія, занимаемыя въ пространствѣ траэкторіею относительнаго движенія.

Абсолютная траэкторія проходитъ черезъ всѣ тѣ точки сѣти, въ которыхъ пересѣкаются двѣ кривыя линіи различныхъ системъ, но относящіяся къ одному и тому же моменту времени, напримѣръ, точка $\mathfrak{m}_2''$ находится на пересѣченіи траэкторіи той точки $\mathfrak{m}_2$ среды, съ которою точка M совмѣщается въ моментъ t'', съ положеніемъ, занимаемымъ относительною траэкторіею въ этотъ моментъ.

Если движущаяся среда неизмѣняемая, то кривыя:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{m}_1' & \mathfrak{m}_2' & \mathfrak{m}_3' & \ldots \\ \mathfrak{m}_1'' & \mathfrak{m}_2'' & \mathfrak{m}_3'' & \ldots \\ \mathfrak{m}_1''' & \mathfrak{m}_2''' & \mathfrak{m}_2''' & \ldots \end{array}$$

будутъ представлять различныя положенія въ пространствѣ одной и той же кривой неизмѣняемаго вида, какъ въ § 47 и на чертежѣ 74, кривыя же другой системы могутъ различаться одна отъ другой не только положеніемъ, но и видомъ.

Если наконецъ неизмѣняемая среда движется поступательно, то каждая система кривыхъ будетъ состоять изъ параллельныхъ кривыхъ линій тождественнаго вида, какъ напримѣръ на чертежѣ 93.

Мы разсмотримъ видъ сѣти для движенія, указаннаго въ примѣрѣ 34.

Въ этомъ случаѣ равенства 234 таковы:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{x} = a\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right) \\ \mathfrak{y} = 2\frac{\tau}{T}\left\{b + 2B\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)(t - \tau)\right\} \\ \mathfrak{z} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (237)$$

Уравненія (235) замѣнятся здѣсь двумя равенствами, незаключающими времени t:

$$\mathfrak{x} = a\left(2\frac{\tau}{T} - 1\right),\ \mathfrak{z} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (238)$$

V-56.57.

они выражаютъ, что траэкторіи течекъ $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2 \ldots\ldots$ суть прямыя линіи параллельныя оси Y. На чертѣжѣ 91 изображены траэкторіи тѣхъ точекъ среды, съ которыми точка M совпадаетъ въ моменты: $\tau = \frac{T}{6}, 2\frac{T}{6}, 3\frac{T}{6}, 4\frac{T}{6}, 5\frac{T}{6}$; точки среды, находящіяся въ A и D, неподвижны.

По исключеніи времени τ изъ равенствъ (237), мы получимъ уравненія другой системы кривыхъ—положеній, занимаемыхъ относительною траэкторіею въ различные моменты t:

$$\mathfrak{y} = \left(1 + \frac{\mathfrak{x}}{a}\right)\left\{b + B\left(1 - \frac{\mathfrak{x}}{a}\right)\left(t - \frac{T}{2}\left(1 + \frac{\mathfrak{x}}{a}\right)\right)\right\},\ \mathfrak{z} = 0. \quad (239)$$

На чертежѣ 91 представлено семь кривыхъ этой системы, представляющихъ положенія относительной траэкторіи въ моменты:

$$t = 0, \frac{T}{6}, 2\frac{T}{6}, 3\frac{T}{6}, 4\frac{T}{6}, 5\frac{T}{6},\ T.$$

§ 57. Скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ измѣняемой средѣ; зависимость между скоростями: относительною и абсолютною.

Скорость относительнаго движенія въ какой либо моментъ t есть скорость того движенія, которое имѣла бы въ этотъ моментъ точка M, если бы она сохранила свое относительное движеніе по отношенію къ средѣ, приведенной съ начала движенія въ неподвижное положеніе, тождественное съ тѣмъ, которое имѣетъ эта среда въ моментъ t при дѣйствительномъ движеніи ея.

Но такое движеніе точки M выражается равенствами (234), если въ нихъ разсматривать t — какъ постоянную, а τ — какъ перемѣнную величину.

Скорость этого движенія въ моментъ t и будетъ скоростью относительнаго движенія въ этотъ моментъ.

Поэтому, чтобы получить выраженіе проэкціи относительной скорости $\mathfrak{u}$ на ось X, надо взять производную по τ отъ перваго изъ равенствъ (234) и затѣмъ положить $\tau = t$; получимъ:

$$\mathfrak{u} \cos(\mathfrak{u}X) = \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{a}}\varphi'_1(t) + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{b}}\varphi'_2(t) + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{c}}\varphi'_3(t).$$

V-57.

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія выраженія для проэкцій относительной скорости на оси координатъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u}X) &= \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{a}}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{b}}\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{c}}\frac{d\mathfrak{c}}{dt} \\ \mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u}Y) &= \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{a}}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{b}}\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{c}}\frac{d\mathfrak{c}}{dt} \\ \mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u}Z) &= \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{a}}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{b}}\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{c}}\frac{d\mathfrak{c}}{dt} \end{aligned}\right\} ; \quad . \qquad (240)$$

входящія здѣсь производныя по времени отъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, опредѣлятся изъ равенствъ (231) или изъ выраженій (232).

Примѣняя эти формулы къ примѣру 34-му, мы найдемъ для него:

$$\mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u}X) = 2\,\frac{a}{T};\ \mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u}Y) = \frac{2b}{T} - \frac{4B}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)t;$$

отсюда видно, что проэкція относительной скорости на ось X имѣетъ постоянную величину, проэкція же ея на ось Y имѣетъ величину перемѣнную; наибольшую величину имѣетъ она въ началѣ и въ концѣ пути, наименьшую—въ серединѣ пути, гдѣ величина этой проэкціи равняется $\frac{2b}{T} - B$.

Скорость относительнаго движенія въ моментъ t направлена, конечно, по касательной къ положенію относительной траэкоріи въ этотъ моментъ.

Если взять производныя по t отъ равенствъ (234), разсматривая τ какъ постоянную величину, а затѣмъ положить $\tau = t$, то получимъ выраженія проэкцій на оси координатъ скорости w той точки среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ t; эта скорость направлена по касательной къ траэкторіи этой точки; и такъ:

$$w\cos(wX) = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t};\ w\cos(wY) = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t};\ w\cos(wZ) = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t};\ (241)$$

здѣсь введенъ знакъ ∂ вмѣсто обычнаго d въ выраженія производныхъ для того, чтобы обратить вниманіе на особое значеніе этихъ производныхъ; это суть частныя производныя по времени, взятыя при предположеніи, что $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ суть величины постоянныя.

Въ примѣрѣ 34-мъ:

$$w\cos(wX) = 0,\ w\cos(wY) = B\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{a^2}\right) = 4\,\frac{Bt}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

V-57.

Абсолютная скорость точки M выражается производными по времени отъ координатъ ея x, y, z.

Съ другой стороны эти координаты выражаются также и формулами (227), если въ нихъ считать $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ функціями времени (232); поэтому:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(vX) &= \frac{dx}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{a}}\mathfrak{a}' + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{b}}\mathfrak{b}' + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{c}}\mathfrak{c}' \\ v\cos(vY) &= \frac{dy}{dt} = \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} + \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{a}}\mathfrak{a}' + \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{b}}\mathfrak{b}' + \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{c}}\mathfrak{c}' \\ v\cos(vZ) &= \frac{dz}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} + \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{a}}\mathfrak{a}' + \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{b}}\mathfrak{b}' + \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{c}}\mathfrak{c}' \end{aligned}\right\} \quad (242)$$

Если принять во вниманіе полученныя выше выраженія (240) и (241), то увидимъ, что послѣднія равенства (242) выражаютъ слѣдующую зависимость между скоростями v, $\mathfrak{u}$, w:

$$\overline{v} = \overline{\mathfrak{u}} + \overline{w}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (243)$$

т. е. *скорость абсолютнаго движенія точки M въ какой либо моментъ t есть геометрическая сумма скорости той точки измѣняемой среды, съ которою точка M въ этотъ моментъ совпадаетъ, и скорости относительнаго движенія точки M по отношенію къ средѣ въ тотъ-же моментъ.*

Обратно:

$$\overline{\mathfrak{u}} = \overline{v} - \overline{w}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

т. е. *скорость относительнаго движенія точки M по отношенію къ измѣняемой средѣ есть геометрическая разность между скоростью абсолютнаго движенія точки M и скоростью той точки среды, съ которою точка M въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ.*

Легко убѣдиться въ справедливости этого соотношенія при движеніи, разсмотрѣнномъ въ примѣрѣ 34. Между прочимъ замѣтимъ, что въ точкахъ A и D (черт. 91) скорость w равна нулю; поэтому въ этихъ точкахъ скорость относительнаго движенія совпадаетъ со скоростью абсолютнаго движенія, такъ что траэкторія A 1^0 2^0 ...... касается къ прямой линіи AD въ точкѣ A, а траэкторія ...... 4^6 5^6 D касается къ этой прямой въ точкѣ D.

VI-58.

ГЛАВА VI.

О составныхъ движеніяхъ.

§ 58. Составное движеніе точки, образующееся изъ соединенія двухъ составляющихъ движеній. Движеніе переносное.

Если говорятъ, что точка M совершаетъ *движеніе составное изъ двухъ составляющихъ движеній*, то подъ этимъ подразумѣвается, что одно изъ составляющихъ движеній есть относительное движеніе ея по отношенію къ нѣкоторой средѣ, которая движется такимъ образомъ, что точка M совершаетъ въ дѣйствительности движеніе, называемое составнымъ.

Напримѣръ: какое либо тѣло движется по полу движущагося вагона; абсолютное движеніе каждой точки этого тѣла можно разсматривать, какъ составное изъ двухъ составляющихъ движеній, одно изъ которыхъ есть относительное движеніе этой точки по отношенію къ вагону.

Другой примѣръ: лодка переплываетъ рѣку; абсолютное движеніе каждой точки лодки можно разсматривать, какъ составное изъ двухъ составляющихъ движеній, одно изъ которыхъ есть относительное движеніе по отношенію къ измѣняемому тѣлу—къ водѣ рѣки.

Другое изъ двухъ составляющихъ движеній точки M заключается въ томъ, что точка M, совершая свое относительное движеніе по точкамъ среды, переносится вмѣстѣ съ ними въ пространствѣ; это составляющее движеніе называется *переноснымъ движеніемъ* (Mouvement d'entraînement. Führungsbewegung) точки M.

Такимъ образомъ всякое движеніе точки M можно разсматривать, какъ движеніе составное (mouvement résultant) изъ двухъ составляющихъ движеній (mouvements composants) этой точки: изъ относительнаго движенія ея по отношенію къ движущейся какимъ либо образомъ неизмѣняемой или измѣняемой средѣ и изъ переноснаго движенія точки вмѣстѣ съ этою средою; такое со-

VI-58.

ставленіе движенія иногда можетъ быть произведено въ дѣйствительности, въ другихъ же случаяхъ оно только мыслимо.

Движеніе точки M, образуемое составленіемъ изъ двухъ движеній, можетъ быть или абсолютнымъ, или, въ свою очередь, относительнымъ, напримѣръ, относительное движеніе точки M по отношенію къ движущейся средѣ № I можно разложить на два движенія, если ввести среду № II, имѣющую какое либо движеніе по отношенію къ средѣ № I; эти два движенія будутъ: относительное движеніе точки M по отношенію къ средѣ № II и переносное движеніе ея вмѣстѣ со второю средою въ относительномъ движеніи этой среды по отношенію къ средѣ № I.

Траэкторія движенія составнаго изъ двухъ движеній пересѣкаетъ діагонально сѣть, образуемую двумя системами кривыхъ линій, какъ показано въ §§ 47 и 56 и на чертежахъ 74, 92 и 93; кривыя линіи одной системы представляютъ положенія, занимаемыя траэкторіею относительнаго движенія въ различные моменты времени, кривыя линіи другой системы представляютъ траэкторіи тѣхъ точекъ [движущейся] среды, съ которыми совпадаетъ точка M въ различные моменты времени.

Каждому моменту времени t соотвѣтствуетъ одна кривая первой и одна кривая второй системы; обѣ пересѣкаются на траэкторіи составнаго движенія.

Напримѣръ моменту t' въ сѣти, представленной на чертежѣ 92, соотвѣтствуютъ: кривая $m_1' m_2' \ldots m_5'$, представляющая положеніе относительной траэкторіи въ этотъ моментъ и кривая $m_1' m_1'' \ldots$ — траэкторія точки m_1, съ которою въ этотъ моментъ совпадаетъ точка M.

Если бы было уничтожено переносное движеніе точки M и среда постоянно находилась бы въ положеніи, занимаемомъ ею въ моментъ t', а относительное движеніе точки M осталось бы неизмѣненнымъ, то есть эта точка совпадала бы съ точками $m_1, m_2, \ldots m_5$ въ тѣ самые моменты $t', t'' \ldots t'''''$, въ которые она совпадаетъ съ ними въ составномъ движеніи, то движеніе точки M совершалось бы по кривой $m_1' m_2' m_3' m_4' m_5'$ и притомъ такимъ образомъ, что она приходила бы въ эти точки пространства въ моменты $t', t'', t''', t'''', t'''''$.

VI-58.

Если бы было уничтожено относительное движеніе точки M и она постоянно находилась бы въ совпаденіи съ точкою m_1, а движеніе среды совершалось бы безъ измѣненій, то точка M описывала бы траэкторію $m_1' m_1'' m_1''' m_1''''$ . . . такимъ образомъ, что она приходила бы въ эти точки пространства въ моменты t', t'', t''', t''''.

Примѣчаніе А. Если будетъ дана пара кривыхъ линій, соотвѣтствующихъ одному моменту времени, будетъ задано движеніе, которое совершила бы точка M по первой кривой, при уничтоженіи составляющаго движенія, соотвѣтствующаго второй кривой, и дано движеніе, которое совершила бы точка M по второй кривой, при уничтоженіи составляющаго движенія, соотвѣтствующаго первой кривой, но не будетъ задано движеніе среды, то мы не будемъ въ состояніи опредѣлить составное движеніе точки M. Предположимъ, что намъ заданы такимъ образомъ кривыя: $m'_1 m'_2$ . . . m'_5 и $m'_1 m''_1$ . . . (черт. 92 и 93); если предположимъ, что среда движется поступательно и въ этомъ предположеніи построимъ сѣть, представленную на чертежѣ 93, то получимъ изображенную на этомъ чертежѣ траэкторію $M' M''$ . . . . составнаго движенія; если же предположимъ, что среда имѣетъ другое движеніе, при которомъ сѣть получаетъ видъ, представленный на чертежѣ 92, то получится траэкторія совершенно иного вида.

Скорость относительнаго движенія точки M въ моментъ t и скорость той точки среды, съ которою въ этотъ моментъ совпадаетъ точка M, называются *скоростями составляющихъ движеній* въ моментъ t, первая — *относительнаго*, вторая *переноснаго*; вообще мы можемъ выразиться такъ:

Скорость точки M въ какой либо моментъ t въ которомъ либо изъ составляющихъ движеній есть та скорость, которую она имѣла бы, если бы было уничтожено другое составляющее движеніе, а точка M въ оставшемся движеніи проходила въ моментъ t черезъ положеніе, занимаемое ею въ этотъ моментъ въ составномъ движеніи.

Между скоростями точки въ составляющихъ движеніяхъ и скоростью точки въ составномъ движеніи существуетъ слѣдующая зависимость:

VI-58.

Въ каждый моментъ движенія скорость составнаго движенія есть геометрическая сумма скоростей составляющихъ движеній.

Эта зависимость доказана въ § 48 для тѣхъ случаевъ, когда среда неизмѣняемая и въ § 57 для тѣхъ случаевъ, когда среда измѣняемая; но, по важности этой теоремы, мы считаемъ необходимымъ привести здѣсь еще другое доказательство ея, иного рода чѣмъ тѣ, которыя приведены въ указанныхъ параграфахъ.

Пусть M (черт. 94) есть положеніе движущейся точки въ моментъ t, M' — положеніе ея въ весьма близкій къ t моментъ $(t+\vartheta)$; $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}_1$ — тѣ точки среды, съ которыми, точка M совпадаетъ въ моменты t и $(t+\vartheta)$; на чертежѣ 94 эти точки изображены въ двухъ положеніяхъ: $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}_1$ суть положенія ихъ въ моментъ t; $\mathfrak{m}'$ и $\mathfrak{m}'_1$ — въ моментъ $(t+\vartheta)$; точки $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'_1$ совпадаютъ съ точками M и M'.

Въ трехъ чертежахъ: 94, 95 и 96 изображены: траэкторія составнаго движенія — толстою чертою, положеніе относительной траэкторіи въ моментъ t — тонкою чертою и траэкторія точки $\mathfrak{m}$ — пунктирною линіею. Кромѣ того на чертежѣ 94 изображено тонкою линіею положеніе относительной траэкторіи въ моментъ $(t+\vartheta)$ и пунктирною линіею — траэкторія точки $\mathfrak{m}_1$.

Проведемъ сѣкущія линіи черезъ точки: M и M', M и $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1$ и M' по нимъ отложимъ длины:

$$\overline{MV}=\frac{\overline{MM'}}{\vartheta};\ \overline{MU}=\frac{\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}}{\vartheta};\ \overline{\mathfrak{m}_1 W}=\frac{\overline{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'_1}}{\vartheta};$$

первыя двѣ отъ точки M ($\mathfrak{m}$), послѣднюю отъ точки $\mathfrak{m}_1$.

Можно показать, что линія $\overline{UV}$ равна и параллельна линіи $\overline{\mathfrak{m}_1 W}$; въ самомъ дѣлѣ изъ предъидущихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$\frac{\overline{MU}}{\overline{M\mathfrak{m}_1}}=\frac{\overline{MV}}{\overline{MM'}}=\frac{1}{\vartheta};$$

поэтому треугольники $M\mathfrak{m}_1M'$ и MUV подобны, а слѣдовательно, линія $\overline{UV}$ параллельна линіи $\overline{\mathfrak{m}_1M'}$ или $\overline{\mathfrak{m}_1 W}$ и кромѣ того:

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}'_1}}=\frac{1}{\vartheta},$$

такъ что длина $\overline{UV}$ равна длинѣ $\overline{\mathfrak{m}_1 W}$

VI - 58.59.

Будемъ теперь уменьшать величину промежутка θ и приближать его къ нулю; тогда длины MU, MV и $\mathfrak{m}_1 W$ будутъ измѣнять и направленіе и величины, но четыреугольникъ $\mathfrak{m}_1 UVW$ будетъ, измѣняя размѣры и направленія сторонъ, оставаться параллелограммомъ (черт. 95); въ то же время треугольникъ $M\mathfrak{m}M'$ будетъ уменьшаться въ размѣрахъ (черт. 95) и сѣкущія будутъ приближаться къ касательнымъ.

Когда θ обратится въ нуль, сѣкущія обратятся въ касательныя (черт. 96), длины $\overline{MV}$, $\overline{MU}$, $\overline{\mathfrak{m}_1 W}$ получатъ величины и направленія скоростей v, $\mathfrak{u}$, w составнаго и составляющихъ движеній, притомъ четыреугольникъ $M\mathfrak{u}vw$ будетъ параллелограммомъ; слѣдовательно *скорость составнаго движенія имѣетъ такую величину и такое направленіе, что представляется діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній.*

Примѣчаніе В. Если будетъ дана пара кривыхъ линій сѣти, соотвѣтствующихъ одному моменту t времени, и даны движенія, которыя совершала бы по нимъ точка M при предположеніяхъ, указанныхъ въ примѣчаніи А, то мы будемъ въ состояніи по этимъ даннымъ опредѣлить величины и направленія скоростей составляющихъ движеній въ моментъ t, а по нимъ, слѣдуя правилу параллелограмма, опредѣлимъ величину и направленіе скорости составнаго движенія въ этотъ моментъ. Изъ этого слѣдуетъ, что разныя траэкторіи составнаго движенія, получащіяся, какъ указано въ примѣчаніи А, при различныхъ предположеніяхъ относительно движенія среды, будутъ имѣть общую касательную линію въ точкѣ M (см. черт. 92 и 93).

§ 59. Составное движеніе твердаго тѣла или неизмѣняемой среды, образующееся изъ соединенія двухъ составляющихъ движеній.

Если говорятъ, что тѣло имѣетъ *движеніе составное изъ двухъ составляющихъ движеній*, то подъ этимъ подразумѣвается, что одно изъ составляющихъ движеній есть относительное по отношенію къ нѣкоторой средѣ, которая движется такимъ образомъ, что тѣло совершаетъ въ дѣйствительности движеніе, называемое составнымъ.

VI-59.

Мы ограничимся только тѣми случаями, въ которыхъ движущееся тѣло—твердое, а среда — неизмѣняемая.

Напримѣръ: абсолютное движеніе какого либо твердаго тѣла, движущагося по поверхности земли, можно разсматривать, какъ движеніе составное изъ двухъ составляющихъ движеній, одно изъ которыхъ есть относительное движеніе тѣла по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, неизмѣнно связанной съ земнымъ шаромъ.

Другое изъ двухъ составляющихъ движеній твердаго тѣла заключается въ томъ, что тѣло, совершая свое относительное движеніе по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, переносится вмѣстѣ съ нею въ пространствѣ; это составляющее движеніе называется *переноснымъ движеніемъ твердаго тѣла.*

Такимъ образомъ всякое движеніе твердаго тѣла или неизмѣняемой среды можно разсматривать, какъ движеніе составное изъ двухъ составляющихъ движеній: изъ относительнаго движенія этого тѣла или этой среды по отношенію къ другой неизмѣняемой средѣ и изъ переноснаго движенія тѣла или первой среды вмѣстѣ со второю средою.

Линейная скорость всякой точки твердаго тѣла въ составномъ движеніи есть геометрическая сумма скоростей этой точки въ составляющихъ движеніяхъ тѣла; то есть, скорость каждой точки тѣла въ составномъ движеніи его есть геометрическая сумма, составленная изъ скорости ея въ относительномъ движеніи по отношенію къ неизмѣняемой средѣ и изъ скорости той точки среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ сказанная точка тѣла.

Изъ этого слѣдуетъ, что въ каждомъ изъ составляющихъ движеній твердое тѣло имѣетъ нѣкоторую угловую скорость и нѣкоторую центральную ось; въ относительномъ движеніи—угловую скорость и центральную ось относительнаго движенія, въ переносномъ—угловую скорость и центральную ось той движущейся неизмѣняемой среды, при посредствѣ которой производится составленіе движенія.

На основаніи доказаннаго въ § 50 мы можемъ сказать, что *угловая скорость составнаго движенія твердаго тѣла есть геометрическая сумма угловыхъ скоростей его въ составляющихъ движеніяхъ.*

VI-59.60.

Изъ §§ 51 и 52 легко вывести правила, опредѣляющія зависимость между положеніями центральныхъ осей составнаго и составляющихъ движеній твердаго тѣла.

§ 60. Составное движеніе точки или твердаго тѣла, образующееся изъ соединенія нѣсколькихъ составляющихъ движеній.

Положимъ, что точка M совершаетъ какое либо абсолютное движеніе.

Представимъ себѣ нѣсколько неизмѣняемыхъ средъ: № I, № II, № III, ... № (K—II), № (K—I), совершающихъ, каждая, свое абсолютное движеніе.

Абсолютное движеніе точки M можно разложить на K составляющихъ движеній нижеслѣдующимъ образомъ.

Прежде всего условимся относительно нѣкоторыхъ обозначеній.

Точки, принадлежащія средѣ № I будемъ означать знаками: $\mathfrak{M}$I съ надлежащими значками внизу; такъ $\mathfrak{M}_1$I, $\mathfrak{M}_2$I, $\mathfrak{M}_3$I, ... суть опредѣленныя точки этой среды; точки среды № II будемъ обозначать знаками: $\mathfrak{M}$II, точки среды № III — знаками $\mathfrak{M}$III, и т. д. . . . . . ; точки среды № (K—I)—знаками: $\mathfrak{M}$(K—I).

Абсолютныя скорости точекъ среды № I будемъ обозначать знаками вида (wI), среды № II — знаками вида (wII) и т. д.

Относительныя скорости точекъ среды № II въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № I будемъ обозначать знаками вида (IwII), относительныя скорости точекъ среды № III въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № II — знаками вида (IIwIII) и т. д.; вообще относительныя скорости точекъ среды № E въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № H будемъ обозначать знаками вида (HwE).

Абсолютную скорость точки M и скорость относительнаго движенія ея по отношенію къ средѣ № E мы будемъ обозначать знаками v и Ev.

Угловую скорость какой либо среды № E въ абсолютномъ движеніи ея будемъ обозначать знакомъ (ωE); угловую скорость ея въ относительномъ движеніи по отношенію къ средѣ H — знакомъ ($H\omega E$).

VI-60.

На основаніи сказаннаго въ § 58, абсолютное движеніе точки M можно разсматривать, какъ составное изъ относительнаго движенія ея по отношенію къ средѣ № I и изъ переноснаго движенія ея вмѣстѣ съ этою средою;

Скорость v абсолютнаго движенія точки M въ каждый моментъ времени t есть геометрическая сумма, составленная изъ скорости точки M въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № I и изъ абсолютной скорости той точки $\mathfrak{M}$I среды № I, съ которою въ моментъ t совпадаетъ точка M; выразимъ это символической формулою:

$$\overline{v} = \overline{(\mathrm{I}v)} + \overline{(w\mathrm{I})} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (245,\mathrm{a})$$

Въ свою очередь относительное движеніе точки M по отношенію къ средѣ № I можно разложить на относительное движеніе по отношенію къ средѣ № II и на переносное движеніе точки M вмѣстѣ со второю средою въ относительномъ движеніи этой среды по отношенію къ средѣ № I.

Скорость (Iv) можно тогда разсматривать какъ геометрическую сумму относительной скорости (IIv) точки M въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № II и скорости (IwII) той точки $\mathfrak{M}$II среды № II, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ точкою M и съ точкою $\mathfrak{M}$I; т. е.:

$$\overline{(\mathrm{I}v)} = \overline{(\mathrm{II}v)} + \overline{(\mathrm{I}w\mathrm{II})} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (245,\mathrm{b})$$

На основаніи сказаннаго въ § 59, угловая скорость абсолютнаго движенія среды № II есть геометрическая сумма, составленная изъ угловой скорости среды № II въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № I, и изъ угловой скорости абсолютнаго движенія среды № I; т. е.:

$$\overline{(\omega\mathrm{II})} = \overline{(\mathrm{I}\omega\mathrm{II})} + \overline{(\omega\mathrm{I})} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (246,\mathrm{a})$$

Далѣе, относительное движеніе точки M по отношенію къ средѣ № II можно разложить на относительное движеніе ея по отношенію къ средѣ № III и на переносное движеніе ея вмѣстѣ съ этою средою,

въ относительномъ движенiи среды № III по отношенiю къ средѣ № II.

Скорость ($\overline{\text{II}v}$) относительнаго движенiя точки M по отношенiю къ средѣ № II можно тогда разсматривать, какъ геометрическую сумму, составленную изъ скорости ($\overline{\text{III}v}$) точки M въ относительномъ движенiи ея по отношенiю къ средѣ № III и изъ скорости ($\overline{\text{II}w\text{III}}$) той точки $\mathfrak{M}$III среды № III, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ точками M, $\mathfrak{M}$I и $\mathfrak{M}$II; т. е.:

$$\overline{(\text{II}v)} = \overline{(\text{III}v)} + \overline{(\text{II}w\text{III})} \quad \ldots\ldots \quad (245,\text{c})$$

Угловая скорость (ωIII) абсолютнаго движенiя среды № III есть геометрическая сумма, составленная изъ угловой скорости относительнаго движенiя среды № III по отношенiю къ средѣ № II и изъ угловой скорости абсолютнаго движенiя среды № II, т. е.:

$$\overline{(\omega\text{III})} = \overline{(\text{II}\omega\text{III})} + \overline{(\omega\text{II})} \quad \ldots\ldots \quad (246,\text{b})$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы дойдемъ до формулъ:

$$\overline{((K-\text{II})v)} = \overline{((K-\text{I})\,v)} + \overline{((K-\text{II})\,w\,(K-\text{I}))} \quad \ldots \quad (245,\text{k}-1)$$

$$\overline{(\omega\,(K-\text{I}))} = \overline{((K-\text{II})\,\omega\,(K-\text{I}))} + \overline{(\omega\,(K-\text{II}))} \quad \ldots \quad (246,\text{k}-2)$$

Сложивъ равенства (245, $a, b, c, \ldots\ldots k-1$) почленно, мы получимъ слѣдующее символическое равенство:

$$\overline{v} = \overline{((K-\text{I})v)} + \overline{((K-\text{II})\,w\,(K-\text{I}))} + \overline{((K-\text{III})w(K-\text{II})} + \ldots$$

$$\ldots + \overline{(\text{II}w\text{III})} + \overline{(\text{I}\,w\,\text{II})} + \overline{(w\text{I})} \quad \ldots\ldots \quad (245)$$

Сложивъ почленно равенства (246, $a, b, c, \ldots\ldots k-2$), мы получимъ слѣдующее символическое равенство:

$$\overline{(\omega(K-\text{I}))} = \overline{((K-\text{II})\,\omega\,(K-\text{I}))} + \overline{((K-\text{III})\,\omega\,(K-\text{II}))} + \ldots$$

$$\ldots + \overline{(\text{II}\omega\text{III})} + \overline{(\text{I}\omega\text{II})} + \overline{(\omega\text{I})} \quad \ldots\ldots \quad (246)$$

VI-60.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что абсолютное движеніе среды № (K—I) можно разсматривать, какъ составное изъ слѣдующихъ (K—I) составляющихъ движеній:

(1) Изъ относительнаго движенія среды по отношенію къ средѣ № (K—II), угловая скорость котораго означена черезъ ((K—II) ω (K—I)).

(2) Изъ переноснаго движенія среды № (K—I) вмѣстѣ съ средою № (K—II) въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № (K—III); угловая скорость этого движенія есть ни что иное, какъ угловая скорость относительнаго движенія среды № (K—II) по отношенію къ средѣ № (K—III), т. е.: ((K—III) ω (K—II)).

(3) Изъ переноснаго движенія среды № (K—I) вмѣстѣ со средами № (K—II) и № (K—III) въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № (K—IV); угловая скорость этого переноснаго движенія есть угловая скорость относительнаго движенія среды № (K—III) по отношенію въ средѣ № (K—IV), т. е.: ((K—IV) ω (K—III)).

. . . .

(K—II) Изъ переноснаго движенія среды № (K—I) вмѣстѣ со средами №№: (K—II), (K—III) . . . . . . III, II въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № I; угловая скорость этого переноснаго движенія есть: (IωII).

(K—I) Изъ переноснаго движенія среды № (K—I) вмѣстѣ со средами №№: (K—II), (K—III) . . . III, II, I въ абсолютномъ движеніи послѣдней; угловая скорость этого переноснаго движенія есть: (ωI).

Равенство (246) выражаетъ, *что угловая скорость составнаго движенія твердаго тѣла есть геометрическая сумма угловыхъ скоростей въ составляющихъ движеніяхъ этого тѣла.*

Это значитъ, что если отъ какой либо точки отложить которую либо изъ угловыхъ скоростей составляющихъ движеній, отъ ея конца—другую, отъ конца этой второй—третью, и т. д., то, соединивъ начало первой съ концомъ послѣдней, получимъ линію, представляющую угловую скорость составнаго движенія.

Совершенно безразлично которую изъ составляющихъ угловыхъ

VI-60.

скоростей откладывать первою, которую—второю, и т. д.: результатъ получается одинъ и тотъ-же. На чертежѣ 97 представлено построеніе угловой скорости Ω составнаго движенія по угловымъ скоростямъ $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_5$ составляющихъ движеній; построеніе сдѣлано трояким образомъ.

Если движеніе тѣла составлено изъ трехъ составляющихъ движеній и угловыя скорости составляющихъ движеній не лежатъ въ одной плоскости, то угловая скорость составнаго движенія можетъ быть построена какъ діагональ параллелепипеда, построеннаго на ребрахъ равныхъ и параллельныхъ угловымъ скоростямъ составляющихъ движеній.

Если движеніе тѣла составное изъ двухъ составляющихъ движеній, то угловая скорость его можетъ быть построена какъ діагональ параллелограмма, построеннаго на сторонахъ равныхъ и параллельныхъ угловымъ скоростямъ составляющихъ движеній.

Примѣръ 35. Тѣло B, имѣющее форму полукруглой вилки (черт. 98), прикрѣпленной къ стержню AZ, вращается вокругъ оси OZ этого стержня, имѣя въ нѣкоторый моментъ t угловую скорость (ωB). Другое тѣло K, имѣющее на чертежѣ форму кольца съ двумя шипами N и N', вложенными въ круглыя гнѣзда вилки B, вращается вокругъ оси $N'ON$; это кольцо K, въ относительномъ движеніи по отношенію къ вилкѣ B, имѣетъ угловую скорость, направленную всегда по оси ON; пусть $(B\omega K)$ есть величина этой угловой скорости въ моментъ t. Третье тѣло, имѣющее на чертежѣ видъ шара C, наглухо надѣтаго на ось ZZ', вложенную въ гнѣзда кольца K, можетъ, по отношенію къ кольцу K, совершать вращеніе вокругъ оси OZ; пусть шаръ C имѣетъ въ моментъ t угловую скорость $(K\omega C)$ въ этомъ относительномъ движеніи по отношенію къ кольцу K.

Составное движеніе шара C будетъ нѣкоторое вращеніе вокругъ точки O, угловая скорость котораго въ моментъ t найдется, какъ геометрическая сумма сказанныхъ трехъ угловыхъ скоростей или какъ діагональ параллелепипеда, построеннаго при вершинѣ O на ребрахъ, изображающихъ эти угловыя скорости.

Въ § 27 на стр. 97 въ строкахъ 5 — 7 сверху было упомянуто,

VI-60.

что величины $ф'$ $ж'$ и $э'$ суть угловыя скорости трехъ вращательныхъ движеній, изъ которыхъ вращательное движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки можетъ быть составлено; легко теперь видѣть, что для этого надо вообразить себѣ двѣ вспомогательныя неизмѣняемыя среды: I и II, первая изъ которыхъ вращается вокругъ оси Z, имѣя въ разсматриваемый моментъ угловую скорость $ж'$, а вторая имѣетъ по отношенію къ первой средѣ вращательное движеніе вокругъ оси ON, неизмѣнно связанной съ первою средою и имѣетъ въ разсматриваемый моментъ угловую скорость $ф'$ въ этомъ относительномъ движеніи. Полное движеніе тѣла можно тогда разсматривать какъ составное: 1) изъ относительнаго движенія его по отношенію къ средѣ II, состоящаго во вращеніи съ угловою скоростью $э'$ вокругъ оси OZ, неизмѣнно связанной съ этою средою, 2) изъ переноснаго движенія тѣла, общаго со средою II въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ I и 3) изъ переноснаго движенія тѣла, общаго со средами II и I въ абсолютномъ движеніи послѣдней.

Если ON будетъ на мгновеніе параллельна оси $У$, а ось OZ — оси X, то (ωB), $(B\omega K)$ и $(K\omega C)$ будутъ равны проэкціямъ угловой скорости составнаго движенія на оси координатъ X, $У$, Z, то есть, тѣмъ величинамъ, которыя мы во второй главѣ обозначили буквами P, Q, R; слѣдовательно P, Q, R дѣйствительно имѣютъ значенія угловыхъ скоростей трехъ составляющихъ движеній, изъ которыхъ полное движеніе тѣла можетъ быть составлено, какъ объ томъ упомянуто въ § 26 на стр. 92 въ строкахъ 4 — 7 сверху, только эти составляющія движенія имѣютъ ту особенность, что въ разсматриваемый моментъ времени мгновенныя оси ихъ взаимно перпендикулярны.

Тоже самое можно сказать и о величинахъ p, q, r.

Возвращаясь снова къ разложенію абсолютнаго движенія точки M, мы видимъ, что это движеніе можетъ быть разложено на K слѣдующихъ составляющихъ движеній:

(1) На относительное движеніе точки M по отношенію къ средѣ № (K—I); скорость ея въ этомъ составномъ движеніи мы означили черезъ $((K—I)v)$.

(2) На переносное движеніе точки M вмѣстѣ со средою № (K—I)

VI-60.

въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № (K—II); скорость этого составнаго движенія: ((K—II)w(K—I)) есть скорость точки $\mathfrak{M}$ (K—I) въ относительномъ движеніи среды № (K—I) по отношенію къ средѣ № (K—II).

(3) На переносное движеніе точки M вмѣстѣ со средою № (K—I) и со средою № (K—II) въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № (K—III); скорость этого составнаго движенія: ((K—III)w(K—II)) есть скорость точки $\mathfrak{M}$ (K—II) въ относительномъ движенія среды № (K—II) по отношенію къ средѣ № (K—III).

. . . .

(K—I) На переносное движеніе точки M вмѣстѣ со средами: № (K—I), № (K—II), ... № II въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № I; скорость этого составнаго движенія: (IwII) есть скорость точки $\mathfrak{M}$II въ относительномъ движеніи среды № II по отношенію къ средѣ № I.

(K) На переносное движеніе точки M вмѣстѣ со средами №№ (K—I), (K—II), ... II, I въ абсолютномъ движеніи послѣдней; скорость этого составнаго движенія: (wI) есть скорость точки $\mathfrak{M}$I.

Точки $\mathfrak{M}$I, $\mathfrak{M}$II, ... $\mathfrak{M}$(K—I) совпадаютъ одна съ другою и съ точкою M въ разсматриваемый моментъ.

Равенство (245) выражаетъ, что *скорость составнаго движенія точки есть геометрическая сумма скоростей составляющихъ движеній ея.*

Затѣмъ, все что приведено выше относительно построенія угловой скорости составнаго движенія твердаго тѣла, примѣняется также и къ построенію линейной скорости составнаго движенія точки, то есть:

Когда составное движеніе точки составляется изъ двухъ составляющихъ движеній, то скорость составнаго движенія есть діагональ параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній (§ 58), потому что всѣ три скорости имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый треугольникъ.

Когда составное движеніе точки составляется изъ трехъ состав-

VI-60; VII-61.

ляющихъ движеній, то скорость составнаго движенія и три скорости составляющихъ движеній имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый четыреугольникъ; если скорости составляющихъ движеній, будучи проведены изъ одной точки, не лежатъ въ одной плоскости, то четыреугольникъ будетъ не плоскій и тогда скорость составнаго движенія можно построить какъ діагональ параллелепипеда, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній.

Когда составное движеніе точки составляется изъ n составляющихъ движеній, то скорость составнаго движенія и n скоростей составляющихъ движеній имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно построить замкнутый многоугольникъ, составленный изъ $(n+1)$ сторонъ.

ГЛАВА VII.

Вопросы, въ которыхъ требуется опредѣлить движеніе точки по даннымъ выраженіямъ скорости ея.

§ 61. Вопросы и задачи, въ которыхъ ищется абсолютное движеніе точки по даннымъ для всего движенія выраженіямъ проэкцій скорости на координатныя оси.

Если извѣстно абсолютное движеніе точки, то, какъ показано въ 1-й главѣ, мы можемъ, путемъ дифференцированія, составить выраженія въ функціяхъ времени проэкцій скорости точки на координатныя оси; такъ, изъ выраженій (1) стр. 6 мы можемъ получить выраженія (3) стр. 21.

Если же, обратно, будутъ заданы, въ функціяхъ времени, выраженія проэкцій скорости точки на координатныя оси, то, желая опредѣлить самое движеніе, мы станемъ конечно интегрировать данныя выраженія:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(t),\ \frac{dy}{dt} = F_2(t),\ \frac{dz}{dt} = F_3(t) \quad \ldots\ldots \quad (247)$$

VII-61.

Результаты интегрированія:

$$x=C_1+\int F_1(t)dt,\ y=C_2+\int F_2(t)dt,\ z=C_3+\int F_3(t)dt\,..\,(248)$$

заключаютъ три произвольныя постоянныя величины C_1, C_2, C_3, присутствіе которыхъ въ формулахъ показываетъ, что заданію удовлетворяетъ безчисленное множество движеній извѣстнаго рода.

Напримѣръ, если дано:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\beta,\ \frac{dz}{dt}=\gamma,$$

то получаются формулы:

$$x=C_1+\alpha t,\ y=C_2+\beta t,\ z=C_3+\gamma t,$$

выражающія, что движеніе точки съ постоянною скоростью данной величины и направленія можетъ совершаться по какой либо изъ безчисленнаго множества прямыхъ линій, параллельныхъ направленію данной скорости, и притомъ положеніе движущейся точки на каждой изъ такихъ линій въ моментъ $t=0$ совершенно неопредѣленно.

Другой примѣръ:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\ \frac{dy}{dt}=gt.$$

Здѣсь получаются интегралы:

$$x=C_1+\alpha t,\ y=C_2+\frac{gt^2}{2};$$

по исключеніи изъ нихъ времени, мы получаемъ уравненіе:

$$(x-C_1)^2=\frac{2\alpha^2}{g}(y-C_2),$$

выражающее, что заданію удовлетворяетъ движеніе по каждой изъ параболъ опредѣленнаго параметра $\frac{2\alpha^2}{g}$, главныя оси которыхъ направлены параллельно положительной оси Y; положеніе же вершины параболы — произвольное, но въ моментъ $t=0$ движущаяся точка должна быть въ вершинѣ своей параболы-траэкторіи.

VII-61.

Вообще, въ рѣшеніяхъ вопросовъ этого рода произвольныя постоянныя величины входятъ только при координатахъ точки, такъ что разности $x - C_1$, $y - C_2$, $z - C_3$ суть вполнѣ опредѣленныя функціи времени, незаключающія никакихъ произвольныхъ величинъ, введенныхъ интегрированіемъ.

Если, кромѣ функцій F_1, F_2, F_3, будутъ заданы координаты x_0, y_0, z_0 точки въ какой либо опредѣленный моментъ времени t_0, то величины постоянныхъ C_1, C_2, C_3 въ интегралахъ (248) опредѣлятся тѣмъ, что эти интегралы должны выражать положеніе точки въ моментъ t_0, какъ и во всякій моментъ движенія, а потому:

$$C_1 = x_0 - \Theta_1(t_0),\ C_2 = y_0 - \Theta_2(t_0),\ C_3 = z_0 - \Theta_3(t_0) \quad \ldots \quad (249)$$

гдѣ

$$\Theta_1(t) = \int F_1(t)\,dt,\ \Theta_2(t) = \int F_2(t)\,dt,\ \Theta_3(t) = \int F_3(t)\,dt.$$

Моментъ t_0 мы будемъ называть *начальнымъ моментомъ*, а координаты x_0, y_0, z_0 — *начальными координатами*; во многихъ случаяхъ будемъ полагать $t_0 = 0$.

Сказанное здѣсь примѣняется подобнымъ же образомъ и къ тѣмъ случаямъ, когда положеніе точки выражается помощію координатъ полярныхъ, сферическихъ, и др.

Примѣръ 36. Точка движется по поверхности сферы радіуса R такимъ образомъ, что скорость ея имѣетъ постоянную величину и составляетъ постоянный уголъ α съ тѣми меридіанами, черезъ которые она проходитъ.

Пусть v_0 есть величина скорости; она перпендикулярна къ радіусу вектору точки и проэкціи ея на оси β и γ постоянны и равны: $v_0 \cos\alpha$, $v_0 \sin\alpha$; поэтому:

$$R\frac{d\varphi}{dt} = v_0\cos\alpha;\ R\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} = v_0\sin\alpha.$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, мы получимъ:

$$R(\varphi - C_2) = v_0 t\cos\alpha,$$

или

$$\varphi = C_2 + at, \quad \ldots \quad (250)$$

гдѣ для краткости означено черезъ a отношеніе: $\frac{v_0\cos\alpha}{R}$.

VII-61.

Второе изъ дифференціальныхъ уравненій можно теперь представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d\psi}{\operatorname{tg}\alpha}=a\frac{dt}{\sin(C_2+at)}.$$

Произведемъ интегрированіе, получимъ:

$$\frac{\psi-C_3}{\operatorname{tg}\alpha}=\log\operatorname{tg}\frac{(C_2+at)}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (251)$$

Изъ равенствъ (250) и (251) мы получаемъ уравненіе, опредѣляющее цѣлую систему кривыхъ линій, пересѣкающихъ меридіаны подъ угломъ α; какъ упомянуто на страницѣ 12-й, кривыя этого рода называются локсодроміями.

Если предположить, что при $t_0=0$, $\varphi=\varphi_0$, $\psi=0$, то равенства 250 и 251 получатъ тотъ самый видъ, который они имѣютъ на стр. 12-й въ примѣрѣ 6-мъ.

Изъ выраженій (1) и (3) можно составить другія выраженія проэкцій скорости на оси координатъ, въ функціяхъ не одного только времени, но также и координатъ точки; напримѣръ, изъ выраженій:

$$x=a+\alpha t,\ y=b+\beta t,\ z=c+\gamma t$$

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\beta,\ \frac{dz}{dt}=\gamma,$$

можно составить слѣдующія выраженія:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x-a}{t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y-b}{t},\ \frac{dz}{dt}=\frac{z-c}{t}.$$

Обратно, могутъ быть задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить движеніе точки, зная функціи координатъ и времени, которыми выражаются проэкціи скорости на координатныя оси; такъ, пусть извѣстны функціи F_1, F_2, F_3 отъ x, y, z, t, выражающія проэкціи скорости на оси X, Y, Z; тогда придется интегрировать совокупныя дифференціальныя уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=F_1(t,x,y,z),\ \frac{dy}{dt}=F_2(t,x,y,z),\ \frac{dz}{dt}=F_3(t,x,y,z)\ .\ .\ .\ .\ (252)$$

Въ курсахъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій дока-

VII-61

зывается, что такая совокупность уравненій имѣетъ три интеграла съ тремя произвольными постоянными. Если эти интегралы будутъ найдены, то, для опредѣленія постоянныхъ произвольныхъ, надо, чтобы были даны начальныя координаты въ начальный моментъ; тогда задача можетъ быть рѣшена вполнѣ.

Къ числу задачъ этого рода относятся задачи объ опредѣленіи вида такъ называемыхъ *погонныхъ линій* или *кривыхъ преслѣдованія и бѣгства.*

Дѣло заключаются въ слѣдующемъ: нѣкоторая точка A движется даннымъ образомъ, другая же точка M движется такимъ образомъ, что скорость ея направлена къ точкѣ A и вмѣстѣ съ тѣмъ есть данная функція времени; траэкторія точки M называется линіею преслѣдованія. Если же скорость точки M направлена постоянно отъ точки A, то траэкторія первой называется линіею бѣгства.

Мы ограничимся слѣдующею задачею этого рода:

Примѣръ 37. Точка A движется по оси X равномѣрно со скоростью c, точка M движется также съ постоянною скоростью v_0, направленною къ точкѣ A; кромѣ того даны начальныя координаты точекъ A и M; требуется опредѣлить движеніе точки M и видъ кривой, описываемой ею.

Возьмемъ начало координатъ въ начальномъ положеніи точки A и условимся считать время отъ начальнаго момента; при такихъ условіяхъ координаты точки A въ моментъ t будутъ: ct и 0; пусть x и y суть координаты точки M въ тотъ же моментъ; нетрудно убѣдиться, что дифференціальныя уравненія, подлежащія интегрированію, будутъ въ этомъ примѣрѣ слѣдующаго вида:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ct - x}{f} v_0, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{f} v_0, \quad \ldots\ldots \quad (253)$$

гдѣ

$$f = +\sqrt{(ct - x)^2 + y^2}.$$

Приступая къ интегрированію этихъ уравненій, мы означимъ, для краткости, $(x - ct)$ черезъ ξ; тогда уравненія (253) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\xi}{dt} = -c - \frac{\xi}{f} v_0, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{f} v_0, \quad \ldots\ldots \quad (254)$$

гдѣ

$$f = +\sqrt{\xi^2 + y^2}.$$

VII-61.

Изъ уравненій (254) мы составимъ два другія уравненія, интегрированіе которыхъ не представитъ затрудненій.

Помноживъ первое изъ уравненій (254) на $\frac{\xi}{f}$, второе — на $\frac{y}{f}$ и сложивъ ихъ почленно, мы получимъ:

$$\frac{df}{dt} = -c\frac{\xi}{f} - v_0 = -\frac{c}{v_0}\frac{\xi}{f}v_0 - v_0,$$

изъ этого и перваго изъ уравненій (254) мы исключимъ $\frac{\xi}{f}$, тогда получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{df}{dt} = \frac{c}{v_0}\frac{d\xi}{dt} + \frac{c^2 - v_0^2}{v_0},$$

изъ котораго получимъ одинъ изъ интеграловъ совокупности (253):

$$f = \frac{c}{v_0}(x - ct) + \frac{c^2 - v_0^2}{v_0}t + C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

Другое интегрирующееся дифференціальное уравненіе получимъ черезъ дѣленіе перваго изъ уравненій (254) на второе:

$$y\frac{d\xi}{dy} = \frac{c}{v_0}f + \xi,$$

или:

$$\frac{y\frac{d\xi}{dy} - \xi}{y^2} = e\frac{f}{y}\frac{1}{y},$$

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{y}\right)^2}} = e\frac{dy}{y},$$

гдѣ

$$e = \frac{c}{v_0}.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія — слѣдующій:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{y}\right)^2} + \frac{\xi}{y} = C_2 y^e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256)$$

Для того, чтобы исключить время t изъ равенствъ (255) и (256), мы поступимъ слѣдующимъ образомъ:

VII-61.

Изъ равенства (256) слѣдуетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{y}\right)^2}+\frac{\xi}{y}}=\frac{y^{-e}}{C_2}$$

или:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{y}\right)^2}-\frac{\xi}{y}=\frac{y^{-e}}{C_2} \ldots\ldots\ldots (257)$$

Изъ равенствъ (256) и (257) мы получимъ выраженія для f и ξ;

$$f=\frac{1}{2}\left(C_2 y^{e+1}+\frac{y^{1-e}}{C_2}\right),\ \xi=\frac{1}{2}\left(C_2 y^{e+1}-\frac{y^{1-e}}{C_2}\right)=x-ct;$$

послѣднее равенство рѣшимъ относительно t и полученныя выраженія для f и t подставимъ въ равенство (255), получимъ уравненіе траэкторіи точки M:

$$2\left(x+\frac{C_1 e}{e^2-1}\right)=\frac{C_2}{e+1}y^{1+e}+\frac{1}{C_2(e-1)}y^{1-e} \ldots (258)$$

Постоянныя C_1 и C_2 опредѣлятся по начальнымъ координатамъ точки M.

На чертежахъ 99 и 100 изображены двѣ погонныя линіи, первая для $c=2v_0$, вторая для $c=\frac{3}{4}v_0$; первая приближается къ оси X ассимптотически, вторая имѣетъ точку перегиба на этой оси въ томъ мѣстѣ, гдѣ точка M настигаетъ точку A.

При $c=v_0$ интегралъ (255) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$f=\xi+C_1; \ldots\ldots\ldots (259)$$

изъ него слѣдуетъ:

$$y^2=C_1(2\xi+C_1) \ldots\ldots\ldots (260)$$

Для полученія другаго интеграла мы подставимъ полученное выраженіе для f въ первое изъ уравненій (254); получимъ уравненіе:

$$\frac{d\xi}{dt}=-c\frac{2\xi+C_1}{\xi+C_1},$$

интегрируя которое, получимъ другой интегралъ:

$$\xi+C_1\log\sqrt{2\xi+C_1}=C_2-2ct,$$

или:

$$x+C_1\log\frac{y}{\sqrt{C_1}}=C_2-ct \ldots\ldots (261)$$

VII-61.62.

По исключеніи времени изъ равенствъ (260) и (261), мы получимъ слѣдующее уравненіе погонной линіи для случая $c = v_0$:

$$2\left(x + \frac{C_1}{4}\right) = \frac{y^2}{2C_1} - C_1 \log \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (262)$$

§ 62. Задается скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ движущейся даннымъ образомъ средѣ и требуется опредѣлить движеніе самой точки.

Примѣръ 38. Неизмѣняемая среда движется поступательно параллельно оси Y и равномѣрно со скоростью β. Точка M имѣетъ постоянную относительную скорость k, направленную параллельно оси X; въ моментъ $t = 0$ точка M выходитъ изъ точки, находящейся на отрицательной оси X и имѣющей координаты: $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$. Опредѣлить движеніе точки.

Очевидно, что абсолютное движеніе точки будетъ происходить равномѣрно со скоростью: $\sqrt{\beta^2 + k^2}$ по прямой линіи, составляющей съ осью X уголъ, тангенсъ котораго равенъ отношенію: $(\beta : k)$. Сѣть кривыхъ, упоминаемая въ §§ 47 и 56, будетъ состоять изъ прямыхъ линій, параллельныхъ осямъ X и Y.

Примѣръ 39. Неизмѣняемая среда движется также, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ; относительная скорость точки M имѣетъ постоянную величину k и направлена къ неподвижной точкѣ C, находящейся на положительной оси X и имѣющей координаты: $x = a$, $y = 0$, $z = 0$; въ моментъ $t = 0$ точка M выходитъ изъ точки A, координаты которой суть $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$. Опредѣлить абсолютное и относительное движеніе точки M.

Начнемъ съ того, что составимъ дифференціальныя уравненія, выражающія, что проэкціи на оси X и Y скорости абсолютнаго движенія точки равняются суммѣ проэкцій на то же направленіе скоростей точки въ относительномъ и въ переносномъ движеніи:

$$\frac{dx}{dt} = k\,\frac{(a-x)}{f}; \quad \frac{dy}{dt} = -k\,\frac{y}{f} + \beta, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (263)$$

гдѣ:

$$f = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}.$$

Изъ этихъ уравненій можно составить два слѣдующія:

$$(a-x)\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = \beta\,(a-x)$$

$$-(a-x)\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -kf + \beta y,$$

VII-62.

или:

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{dt}=\frac{\beta}{(a-x)};\ \frac{df}{dt}=-k+\beta\frac{y}{f},$$

или:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}}=\frac{\beta}{k}\frac{dx}{(a-x)}\\&\frac{df}{dt}=-k-\frac{\beta}{k}\left(\frac{dy}{dt}-\beta\right).\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots (264)$$

Интегралъ перваго изъ этихъ уравненій даетъ уравненіе абсолютной траэкторіи:

$$y+\sqrt{(a-x)^2+y^2}=C_1(a-x)^{1-e}, \ \ldots \ (265)$$

гдѣ:

$$e=\frac{\beta}{k}.$$

Для опредѣленія постоянной, мы примемъ во вниманіе, что при $t=o$, $y=o$ и $x=-a$; подставивъ эти величины x и y въ полученное уравненіе, мы найдемъ:

$$C_1=(2a)^e.$$

Интегралъ втораго изъ уравненій (264) будетъ:

$$f=C_2+k(e^2-1)t-ey; \ \ldots\ldots\ (266)$$

по начальнымъ даннымъ найдемъ:

$$C_2=2a.$$

При $e=1$ оба равенства (266) и (265) тождественны; для опредѣленія другаго интеграла надо поступить также, какъ было поступлено въ примѣрѣ 37 для случая $c=v_0$.

При $e<1$ уравненіе (265) удовлетворяется координатами точки C ($x=a$, $y=0$); точка M приходитъ въ нее въ моментъ: $t=\frac{2a}{k(1-e^2)}$.

Ср. 144.

Примѣръ 40. Измѣняемая среда движется, какъ указано въ примѣрѣ 30; скорость относительнаго движенія точки M имѣетъ постоянную величину k и направлена параллельно оси X; начальныя данныя: $t=0$, $x=-a$, $y=0$. Движеніе происходитъ въ плоскости XY. Опредѣлить движеніе точки M абсолютное и относительное.

VII-62.

Такъ какъ скорость относительнаго движенія точки M направлена параллельно оси X и имѣетъ постоянную величину k, а скорость переноснаго движенія ея направлена параллельно оси $У$ и равна скорости той точки среды, съ которою совпадаетъ точка M, то, означивъ черезъ x и y абсолютныя координаты точки M, будемъ имѣть слѣдующія дифференціальныя уравненія для опредѣленія абсолютнаго движенія ея:

$$\frac{dx}{dt} = k, \frac{dy}{dt} = B\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Интегралъ перваго изъ нихъ есть:

$$x = C_1 + kt.$$

Такъ какъ при $t = 0$, $x = -a$, то $C_1 = -a$, а потому:

$$x = kt - a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (267)$$

то есть проэкція точки M на ось X движется равномѣрно.

Подставивъ полученное выраженіе для x въ функціи t во второе изъ дифференціальныхъ уравненій и интегрируя его, мы получимъ:

$$\frac{dy}{dt} = B\left(\frac{2kt}{a} - \frac{k^2t^2}{a^2}\right)$$

$$y = C_2 + B\left(1 - \frac{kt}{3a}\right)\frac{kt^2}{a};$$

такъ какъ при $t = 0$, y равно 0, то $C_2 = 0$, а потому другой интегралъ въ окончательной формѣ будетъ слѣдующій:

$$y = B\left(1 - \frac{kt}{3a}\right)\frac{kt^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

Равенства (267) и (268) выражаютъ абсолютное движеніе точки M; по исключеніи времени изъ нихъ, мы получимъ уравненіе траэкторіи абсолютнаго движенія:

$$y = \frac{B}{3ka^2}(2a - x)(x + a)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269)$$

Эта кривая изображена толстою чертою на чертежѣ (101); она имѣетъ точку перегиба въ E, гдѣ ее пересѣкаетъ ось $У$; въ точкахъ A и D она пересѣкаетъ границы среды ортогонально; обѣ половины ея, раздѣляемыя точкою E, тождественны по виду.

VI-60.

что величины *ф'* *ж'* и *э'* суть угловыя скорости трехъ вращательныхъ движеній, изъ которыхъ вращательное движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки можетъ быть составлено; легко теперь видѣть, что для этого надо вообразить себѣ двѣ вспомогательныя неизмѣняемыя среды: I и II, первая изъ которыхъ вращается вокругъ оси Z, имѣя въ разсматриваемый моментъ угловую скорость *ж'*, а вторая имѣетъ по отношенію къ первой средѣ вращательное движеніе вокругъ оси ON, неизмѣнно связанной съ первою средою и имѣетъ въ разсматриваемый моментъ угловую скорость *ф'* въ этомъ относительномъ движеніи. Полное движеніе тѣла можно тогда разсматривать какъ составное: 1) изъ относительнаго движенія его по отношенію къ средѣ II, состоящаго во вращеніи съ угловою скоростью *э'* вокругъ оси OZ, неизмѣнно связанной съ этою средою, 2) изъ переноснаго движенія тѣла, общаго со средою II въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ I и 3) изъ переноснаго движенія тѣла, общаго со средами II и I въ абсолютномъ движеніи послѣдней.

Если ON будетъ на мгновеніе параллельна оси $У$, а ось OZ — оси X, то (ωB), $(B\omega K)$ и $(K\omega C)$ будутъ равны проэкціямъ угловой скорости составнаго движенія на оси координатъ X, $У$, Z, то есть, тѣмъ величинамъ, которыя мы во второй главѣ обозначили буквами P, Q, R; слѣдовательно P, Q, R дѣйствительно имѣютъ значенія угловыхъ скоростей трехъ составляющихъ движеній, изъ которыхъ полное движеніе тѣла можетъ быть составлено, какъ объ томъ упомянуто въ § 26 на стр. 92 въ строкахъ 4 — 7 сверху, только эти составляющія движенія имѣютъ ту особенность, что въ разсматриваемый моментъ времени мгновенныя оси ихъ взаимно перпендикулярны.

Тоже самое можно сказать и о величинахъ p, q, r.

Возвращаясь снова къ разложенію абсолютнаго движенія точки M, мы видимъ, что это движеніе можетъ быть разложено на K слѣдующихъ составляющихъ движеній:

(1) На относительное движеніе точки M по отношенію къ средѣ № $(K—I)$; скорость ея въ этомъ составномъ движеніи мы означили черезъ $((K—I)v)$.

(2) На переносное движеніе точки M вмѣстѣ со средою № $(K—I)$

VI-60.

въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № (*K*—II); скорость этого составнаго движенія: ((*K*—II)*w*(*K*—I)) есть скорость точки $\mathfrak{M}$ (*K*—I) въ относительномъ движеніи среды № (*K*—I) по отношенію къ средѣ № (*K*—II).

(3) На переносное движеніе точки *M* вмѣстѣ со средою № (*K*—I) и со средою № (*K*—II) въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № (*K*—III); скорость этого составнаго движенія: ((*K*—III)*w*(*K*—II)) есть скорость точки $\mathfrak{M}$ (*K*—II) въ относительномъ движеніи среды № (*K*—II) по отношенію къ средѣ № (*K*—III).

. . . .

(*K*—I) На переносное движеніе точки *M* вмѣстѣ со средами: № (*K*—I), № (*K*—II), ... № II въ относительномъ движеніи послѣдней по отношенію къ средѣ № I; скорость этого составнаго движенія: (I*w*II) есть скорость точки $\mathfrak{M}$II въ относительномъ движеніи среды № II по отношенію къ средѣ № I.

(*K*) На переносное движеніе точки *M* вмѣстѣ со средами №№ (*K*—I), (*K*—II), ... II, I въ абсолютномъ движеніи послѣдней; скорость этого составнаго движенія: (*w*I) есть скорость точки $\mathfrak{M}$I.

Точки $\mathfrak{M}$I, $\mathfrak{M}$II, ... $\mathfrak{M}$(*K*—I) совпадаютъ одна съ другою и съ точкою *M* въ разсматриваемый моментъ.

Равенство (245) выражаетъ, что *скорость составнаго движенія точки есть геометрическая сумма скоростей составляющихъ движеній ея.*

Затѣмъ, все что приведено выше относительно построенія угловой скорости составнаго движенія твердаго тѣла, примѣняется также и къ построенію линейной скорости составнаго движенія точки, то есть:

Когда составное движеніе точки составляется изъ двухъ составляющихъ движеній, то скорость составнаго движенія есть діагональ параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній (§ 58), потому что всѣ три скорости имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый треугольникъ.

Когда составное движеніе точки составляется изъ трехъ состав-

VI-60; VII-61.

ляющихъ движеній, то скорость составнаго движенія и три скорости составляющихъ движеній имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый четыреугольникъ; если скорости составляющихъ движеній, будучи проведены изъ одной точки, не лежатъ въ одной плоскости, то четыреугольникъ будетъ не плоскій и тогда скорость составнаго движенія можно построить какъ діагональ параллелепипеда, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній.

Когда составное движеніе точки составляется изъ n составляющихъ движеній, то скорость составнаго движенія и n скоростей составляющихъ движеній имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно построить замкнутый многоугольникъ, составленный изъ $(n+1)$ сторонъ.

ГЛАВА VII.

Вопросы, въ которыхъ требуется опредѣлить движеніе точки по даннымъ выраженіямъ скорости ея.

§ 61. Вопросы и задачи, въ которыхъ ищется абсолютное движеніе точки по даннымъ для всего движенія выраженіямъ проэкцій скорости на координатныя оси.

Если извѣстно абсолютное движеніе точки, то, какъ показано въ 1-й главѣ, мы можемъ, путемъ дифференцированія, составить выраженія въ функціяхъ времени проэкцій скорости точки на координатныя оси; такъ, изъ выраженій (1) стр. 6 мы можемъ получить выраженія (3) стр. 21.

Если же, обратно, будутъ заданы, въ функціяхъ времени, выраженія проэкцій скорости точки на координатныя оси, то, желая опредѣлить самое движеніе, мы станемъ конечно интегрировать данныя выраженія:

$$\frac{dx}{dt}=F_1(t),\ \frac{dy}{dt}=F_2(t),\ \frac{dz}{dt}=F_3(t)\ \ldots\ldots\ (247)$$

/

VII-61.

Результаты интегрированія:

$$x=C_1+\int F_1(t)dt,\ y=C_2+\int F_2(t)dt,\ z=C_3+\int F_3(t)dt\,..\,(248)$$

заключаютъ три произвольныя постоянныя величины C_1, C_2, C_3, присутствіе которыхъ въ формулахъ показываетъ, что заданію удовлетворяетъ безчисленное множество движеній извѣстнаго рода.

Напримѣръ, если дано:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\beta,\ \frac{dz}{dt}=\gamma,$$

то получаются формулы:

$$x=C_1+\alpha t,\ y=C_2+\beta t,\ z=C_3+\gamma t,$$

выражающія, что движеніе точки съ постоянною скоростью данной величины и направленія можетъ совершаться по какой либо изъ безчисленнаго множества прямыхъ линій, параллельныхъ направленію данной скорости, и притомъ положеніе движущейся точки на каждой изъ такихъ линій въ моментъ $t=0$ совершенно неопредѣленно.

Другой примѣръ:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\ \frac{dy}{dt}=gt.$$

Здѣсь получаются интегралы:

$$x=C_1+\alpha t,\ y=C_2+\frac{gt^2}{2};$$

по исключеніи изъ нихъ времени, мы получаемъ уравненіе:

$$(x-C_1)^2=\frac{2\alpha^2}{g}(y-C_2),$$

выражающее, что заданію удовлетворяетъ движеніе по каждой изъ параболъ опредѣленнаго параметра $\frac{2\alpha^2}{g}$, главныя оси которыхъ направлены параллельно положительной оси Y; положеніе же вершины параболы — произвольное, но въ моментъ $t=0$ движущаяся точка должна быть въ вершинѣ своей параболы-траэкторіи.

VII-61.

Вообще, въ рѣшеніяхъ вопросовъ этого рода произвольныя постоянныя величины входятъ только при координатахъ точки, такъ что разности $x - C_1$, $y - C_2$, $z - C_3$ суть вполнѣ опредѣленныя функціи времени, незаключающія никакихъ произвольныхъ величинъ, введенныхъ интегрированіемъ.

Если, кромѣ функцій F_1, F_2, F_3, будутъ заданы координаты x_0, y_0, z_0 точки въ какой либо опредѣленный моментъ времени t_0, то величины постоянныхъ C_1, C_2, C_3 въ интегралахъ (248) опредѣлятся тѣмъ, что эти интегралы должны выражать положеніе точки въ моментъ t_0, какъ и во всякій моментъ движенія, а потому:

$$C_1 = x_0 - \Theta_1(t_0),\ C_2 = y_0 - \Theta_2(t_0),\ C_3 = z_0 - \Theta_3(t_0) \ldots \quad (249)$$

гдѣ

$$\Theta_1(t) = \int F_1(t)\,dt,\ \Theta_2(t) = \int F_2(t)\,dt,\ \Theta_3(t) = \int F_3(t)\,dt.$$

Моментъ t_0 мы будемъ называть *начальнымъ моментомъ*, а координаты x_0, y_0, z_0 — *начальными координатами*; во многихъ случаяхъ будемъ полагать $t_0 = 0$.

Сказанное здѣсь примѣняется подобнымъ же образомъ и къ тѣмъ случаямъ, когда положеніе точки выражается помощію координатъ полярныхъ, сферическихъ, и др.

Примѣръ 36. Точка движется по поверхности сферы радіуса R такимъ образомъ, что скорость ея имѣетъ постоянную величину и составляетъ постоянный уголъ α съ тѣми меридіанами, черезъ которые она проходитъ.

Пусть v_0 есть величина скорости; она перпендикулярна къ радіусу вектору точки и проэкціи ея на оси β и γ постоянны и равны: $v_0 \cos\alpha$, $v_0 \sin\alpha$; поэтому:

$$R\frac{d\varphi}{dt} = v_0\cos\alpha;\ R\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} = v_0\sin\alpha.$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, мы получимъ:

$$R(\varphi - C_2) = v_0 t\cos\alpha,$$

или

$$\varphi = C_2 + at, \ldots \quad (250)$$

гдѣ для краткости означено черезъ a отношеніе: $\frac{v_0\cos\alpha}{R}$.

VII - 61.

Второе изъ дифференціальныхъ уравненій можно теперь представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d\psi}{\operatorname{tg}\alpha}=a\frac{dt}{\sin(C_2+at)}.$$

Произведемъ интегрированіе, получимъ:

$$\frac{\psi-C_3}{\operatorname{tg}\alpha}=\log\operatorname{tg}\frac{(C_2+at)}{2}\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; (251)$$

Изъ равенствъ (250) и (251) мы получаемъ уравненіе, опредѣляющее цѣлую систему кривыхъ линій, пересѣкающихъ меридіаны подъ угломъ α; какъ упомянуто на страницѣ 12-й, кривыя этого рода называются локсодроміями.

Если предположить, что при $t_0=0$, $\varphi=\varphi_0$, $\psi=0$, то равенства 250 и 251 получать тотъ самый видъ, который они имѣютъ на стр. 12-й въ примѣрѣ 6-мъ.

Изъ выраженій (1) и (3) можно составить другія выраженія проэкцій скорости на оси координатъ, въ функціяхъ не одного только времени, но также и координатъ точки; напримѣръ, изъ выраженій:

$$x=a+\alpha t,\; y=b+\beta t,\; z=c+\gamma t$$

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\; \frac{dy}{dt}=\beta,\; \frac{dz}{dt}=\gamma,$$

можно составить слѣдующія выраженія:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x-a}{t},\; \frac{dy}{dt}=\frac{y-b}{t},\; \frac{dz}{dt}=\frac{z-c}{t}.$$

Обратно, могутъ быть задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить движеніе точки, зная функціи координатъ и времени, которыми выражаются проэкціи скорости на координатныя оси; такъ, пусть извѣстны функціи F_1, F_2, F_3 отъ x, y, z, t, выражающія проэкціи скорости на оси X, Y, Z; тогда придется интегрировать совокупныя дифференціальныя уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=F_1(t,x,y,z),\; \frac{dy}{dt}=F_2(t,x,y,z),\; \frac{dz}{dt}=F_3(t,x,y,z)\; .\; .\; .\; .\; (252)$$

Въ курсахъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій дока-

VII-61.

зывается, что такая совокупность уравненій имѣетъ три интеграла съ тремя произвольными постоянными. Если эти интегралы будутъ найдены, то, для опредѣленія постоянныхъ произвольныхъ, надо, чтобы были даны начальныя координаты въ начальный моментъ; тогда задача можетъ быть рѣшена вполнѣ.

Къ числу задачъ этого рода относятся задачи объ опредѣленіи вида такъ называемыхъ *погонныхъ линій* или *кривыхъ преслѣдованія и бѣгства.*

Дѣло заключаются въ слѣдующемъ: нѣкоторая точка A движется даннымъ образомъ, другая же точка M движется такимъ образомъ, что скорость ея направлена къ точкѣ A и вмѣстѣ съ тѣмъ есть данная функція времени; траэкторія точки M называется линіею преслѣдованія. Если же скорость точки M направлена постоянно отъ точки A, то траэкторія первой называется линіею бѣгства.

Мы ограничимся слѣдующею задачею этого рода:

Примѣръ 37. Точка A движется по оси X равномѣрно со скоростью c, точка M движется также съ постоянною скоростью v_0, направленною къ точкѣ A; кромѣ того даны начальныя координаты точекъ A и M; требуется опредѣлить движеніе точки M и видъ кривой, описываемой ею.

Возьмемъ начало координатъ въ начальномъ положеніи точки A и условимся считать время отъ начальнаго момента; при такихъ условіяхъ координаты точки A въ моментъ t будутъ: ct и 0; пусть x и y суть координаты точки M въ тотъ же моментъ; нетрудно убѣдиться, что дифференціальныя уравненія, подлежащія интегрированію, будутъ въ этомъ примѣрѣ слѣдующаго вида:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ct - x}{f} v_0, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{f} v_0, \quad \ldots\ldots \quad (253)$$

гдѣ

$$f = +\sqrt{(ct - x)^2 + y^2}.$$

Приступая къ интегрированію этихъ уравненій, мы означимъ, для краткости, $(x - ct)$ черезъ ξ; тогда уравненія (253) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\xi}{dt} = -c - \frac{\xi}{f} v_0, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{f} v_0, \quad \ldots\ldots \quad (254)$$

гдѣ

$$f = +\sqrt{\xi^2 + y^2}.$$

VII-61.

Изъ уравненій (254) мы составимъ два другія уравненія, интегрированіе которыхъ не представитъ затрудненій.

Помноживъ первое изъ уравненій (254) на $\frac{\xi}{f}$, второе — на $\frac{y}{f}$ и сложивъ ихъ почленно, мы получимъ:

$$\frac{df}{dt} = -c\frac{\xi}{f} - v_0 = -\frac{c}{v_0}\frac{\xi}{f}v_0 - v_0,$$

изъ этого и перваго изъ уравненій (254) мы исключимъ $\frac{\xi}{f}$, тогда получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{df}{dt} = \frac{c}{v_0}\frac{d\xi}{dt} + \frac{c^2 - v_0^2}{v_0},$$

изъ котораго получимъ одинъ изъ интеграловъ совокупности (253):

$$f = \frac{c}{v_0}(x - ct) + \frac{c^2 - v_0^2}{v_0}t + C_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (255)$$

Другое интегрирующееся дифференціальное уравненіе получимъ черезъ дѣленіе перваго изъ уравненій (254) на второе:

$$y\frac{d\xi}{dy} = \frac{c}{v_0}f + \xi,$$

или:

$$\frac{y\frac{d\xi}{dy} - \xi}{y^2} = e\frac{f}{y}\frac{1}{y},$$

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{y}\right)^2}} = e\frac{dy}{y},$$

гдѣ

$$e = \frac{c}{v_0}.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія — слѣдующій:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{y}\right)^2} + \frac{\xi}{y} = C_2 y^e \quad . \; . \; . \; . \quad (256)$$

Для того, чтобы исключить время t изъ равенствъ (255) и (256), мы поступимъ слѣдующимъ образомъ:

VII-61.

Изъ равенства (256) слѣдуетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{y}\right)^2+\frac{\xi}{y}}}=\frac{y^{-e}}{C_2}$$

или:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{y}\right)^2}-\frac{\xi}{y}=\frac{y^{-e}}{C_2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(257)$$

Изъ равенствъ (256) и (257) мы получимъ выраженія для f и ξ;

$$f=\frac{1}{2}\left(C_2 y^{e+1}+\frac{y^{1-e}}{C_2}\right),\ \xi=\frac{1}{2}\left(C_2 y^{e+1}-\frac{y^{1-e}}{C_2}\right)=x-ct;$$

послѣднее равенство рѣшимъ относительно t и полученныя выраженія для f и t подставимъ въ равенство (255), получимъ уравненіе траэкторіи точки M:

$$2\left(x+\frac{C_1 e}{e^2-1}\right)=\frac{C_2}{e+1}y^{1+e}+\frac{1}{C_2(e-1)}y^{1-e}\,.\,.\,.\,.\,(258)$$

Постоянныя C_1 и C_2 опредѣлятся по начальнымъ координатамъ точки M.

На чертежахъ 99 и 100 изображены двѣ погонныя линіи, первая для $c=2v_0$, вторая для $c=\frac{3}{4}v_0$; первая приближается къ оси X ассимптотически, вторая имѣетъ точку перегиба на этой оси въ томъ мѣстѣ, гдѣ точка M настигаетъ точку A.

При $c=v_0$ интегралъ (255) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$f=\xi+C_1;\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(259)$$

изъ него слѣдуетъ:

$$y^2=C_1(2\xi+C_1)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(260)$$

Для полученія другаго интеграла мы подставимъ полученное выраженіе для f въ первое изъ уравненій (254); получимъ уравненіе:

$$\frac{d\xi}{dt}=-c\frac{2\xi+C_1}{\xi+C_1},$$

интегрируя которое, получимъ другой интегралъ:

$$\xi+C_1\log\sqrt{2\xi+C_1}=C_2-2ct,$$

или:

$$x+C_1\log\frac{y}{\sqrt{C_1}}=C_2-ct\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(261)$$

VII - 61.62.

По исключеніи времени изъ равенствъ (260) и (261), мы получимъ слѣдующее уравненіе погонной линіи для случая $c = v_0$:

$$2\left(x + \frac{C_1}{4}\right) = \frac{y^2}{2C_1} - C_1 \log \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (262)$$

§ 62. Задается скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ движущейся даннымъ образомъ средѣ и требуется опредѣлить движеніе самой точки.

Примѣръ 38. Неизмѣняемая среда движется поступательно параллельно оси Y и равномѣрно со скоростью β. Точка M имѣетъ постоянную относительную скорость k, направленную параллельно оси X; въ моментъ $t = 0$ точка M выходитъ изъ точки, находящейся на отрицательной оси X и имѣющей координаты: $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$. Опредѣлить движеніе точки.

Очевидно, что абсолютное движеніе точки будетъ происходить равномѣрно со скоростью: $\sqrt{\beta^2 + k^2}$ по прямой линіи, составляющей съ осью X уголъ, тангенсъ котораго равенъ отношенію: $(\beta : k)$. Сѣть кривыхъ, упоминаемая въ §§ 47 и 56, будетъ состоять изъ прямыхъ линій, параллельныхъ осямъ X и Y.

Примѣръ 39. Неизмѣняемая среда движется также, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ; относительная скорость точки M имѣетъ постоянную величину k и направлена къ неподвижной точкѣ C, находящейся на положительной оси X и имѣющей координаты: $x = a$, $y = 0$, $z = 0$; въ моментъ $t = 0$ точка M выходитъ изъ точки A, координаты которой суть $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$. Опредѣлить абсолютное и относительное движеніе точки M.

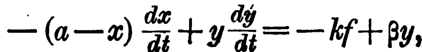
Начнемъ съ того, что составимъ дифференціальныя уравненія, выражающія, что проэкціи на оси X и Y скорости абсолютнаго движенія точки равняются суммѣ проэкцій на то же направленіе скоростей точки въ относительномъ и въ переносномъ движеніи:

$$\frac{dx}{dt} = k\,\frac{(a-x)}{f}; \quad \frac{dy}{dt} = -\,k\,\frac{y}{f} + \beta, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263)$$

гдѣ:

$$f = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}.$$

Изъ этихъ уравненій можно составить два слѣдующія:



$$(a-x)\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = \beta\,(a-x)$$

$$-(a-x)\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -kf + \beta y,$$

VII-62.

или:

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{dt}=\frac{\beta}{(a-x)};\ \frac{df}{dt}=-k+\beta\frac{y}{f},$$

или:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}}&=\frac{\beta}{k}\frac{dx}{(a-x)}\\ \frac{df}{dt}&=-k-\frac{\beta}{k}\left(\frac{dy}{dt}-\beta\right).\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (264)$$

Интегралъ перваго изъ этихъ уравненій даетъ уравненіе абсолютной траэкторіи:

$$y+\sqrt{(a-x)^2+y^2}=C_1(a-x)^{1-e}\ ,\ \ldots\ (265)$$

гдѣ:

$$e=\frac{\beta}{k}.$$

Для опредѣленія постоянной, мы примемъ во вниманіе, что при $t=o$, $y=o$ и $x=-a$; подставивъ эти величины x и y въ полученное уравненіе, мы найдемъ:

$$C_1=(2a)^e.$$

Интегралъ втораго изъ уравненій (264) будетъ:

$$f=C_2+k(e^2-1)t-ey;\ \ldots\ldots\ (266)$$

по начальнымъ даннымъ найдемъ:

$$C_2=2a.$$

При $e=1$ оба равенства (266) и (265) тождественны; для опредѣленія другаго интеграла надо поступить также, какъ было поступлено въ примѣрѣ 37 для случая $c=v_0$.

При $e<1$ уравненіе (265) удовлетворяется координатами точки C ($x=a$, $y=0$); точка M приходитъ въ нее въ моментъ: $t=\frac{2a}{k(1-e^2)}$.

Примѣръ 40. Измѣняемая среда движется, какъ указано въ примѣрѣ 30; скорость относительнаго движенія точки M имѣетъ постоянную величину k и направлена параллельно оси X; начальныя данныя: $t=0$, $x=-a$, $y=0$. Движеніе происходитъ въ плоскости XY. Опредѣлить движеніе точки M абсолютное и относительное.

стр. 194.

VII-62.

Такъ какъ скорость относительнаго движенія точки M направлена параллельно оси X и имѣетъ постоянную величину k, а скорость переноснаго движенія ея направлена параллельно оси Y и равна скорости той точки среды, съ которою совпадаетъ точка M, то, означивъ черезъ x и y абсолютныя координаты точки M, будемъ имѣть слѣдующія дифференціальныя уравненія для опредѣленія абсолютнаго движенія ея:

$$\frac{dx}{dt} = k, \ \frac{dy}{dt} = B\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Интегралъ перваго изъ нихъ есть:

$$x = C_1 + kt.$$

Такъ какъ при $t = 0$, $x = -a$, то $C_1 = -a$, а потому:

$$x = kt - a, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (267)$$

то есть проэкція точки M на ось X движется равномѣрно.

Подставивъ полученное выраженіе для x въ функціи t во второе изъ дифференціальныхъ уравненій и интегрируя его, мы получимъ:

$$\frac{dy}{dt} = B\left(\frac{2kt}{a} - \frac{k^2t^2}{a^2}\right)$$

$$y = C_2 + B\left(1 - \frac{kt}{3a}\right)\frac{kt^2}{a};$$

такъ какъ при $t = 0$, y равно 0, то $C_2 = 0$, а потому другой интегралъ въ окончательной формѣ будетъ слѣдующій:

$$y = B\left(1 - \frac{kt}{3a}\right)\frac{kt^2}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (268)$$

Равенства (267) и (268) выражаютъ абсолютное движеніе точки M; по исключеніи времени изъ нихъ, мы получимъ уравненіе траэкторіи абсолютнаго движенія:

$$y = \frac{B}{3ka^2}(2a - x)(x + a)^2 \quad \ldots \ldots \quad (269)$$

Эта кривая изображена толстою чертою на чертежѣ (101); она имѣетъ точку перегиба въ E, гдѣ ее пересѣкаетъ ось Y; въ точкахъ A и D она пересѣкаетъ границы среды ортогонально; обѣ половины ея, раздѣляемыя точкою E, тождественны по виду.

VII-62.

Поступая какъ въ примѣрѣ 34, мы можемъ построить систему линій, представляющихъ положенія траэкторіи относительнаго движенія въ различные моменты.

Начальныя координаты той точки среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ τ, выражаются такъ:

$$\mathfrak{a}=k\tau-a,\ \mathfrak{b}=B\left(\frac{2}{3}\frac{k\tau}{a}-1\right)\frac{k\tau^2}{a}.$$

Координаты этой точки среды въ моментъ t будутъ:

$$\mathfrak{x}=k\tau-a,\ \mathfrak{y}=B\frac{k\tau}{a}\left\{\left(2-\frac{k\tau}{a}\right)t+\left(\frac{2}{3}\frac{k\tau}{a}-1\right)\tau\right\}.$$

По исключеніи отсюда времени τ, мы получимъ уравненіе положенія относительной траэкторіи въ моментъ t:

$$\mathfrak{y}=\frac{B}{a^2}(\mathfrak{x}+a)\left\{\frac{(2\mathfrak{x}-a)}{3k}(\mathfrak{x}+a)+(a-\mathfrak{x})t\right\}\ .\ .\ (270)$$

На чертежѣ 101 изображены такія кривыя соотвѣтствующія семи моментамъ времени; $t=0,\ \frac{a}{3k},\ \frac{2a}{3k},\ \frac{a}{k},\ \frac{4a}{3k},\ \frac{5a}{3k},\ \frac{2a}{k}$; каждая кривая имѣетъ касательную параллельную оси X въ точкѣ пересѣченія ея съ траэкторіею абсолютнаго движенія.

Примѣръ 41. Движеніе среды — такое же какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; точка M, выйдя изъ точки A въ моментъ $t=0$, движется въ средѣ съ постоянною относительною скоростью k, направленною къ точкѣ C, координаты которой суть: $x=a$, $y=0$; опредѣлить траэкторію абсолютнаго движенія точки M.

Въ этомъ примѣрѣ придется интегрировать слѣдующія совокупныя дифференціальныя уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=k\frac{(a-x)}{f},\ \frac{dy}{dt}=-k\frac{y}{f}+B\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

гдѣ

$$f=\sqrt{(a-x)^2+y^2}.$$

Помножимъ второе изъ нихъ на $(a-x)$ и придадимъ къ нему первое, помноженное на y, затѣмъ все раздѣлимъ на $(a-x)^2$, получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{dt}=\frac{B}{a^2}(a+x);$$

VII-62.

или

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}}=\frac{B}{ka^2}(a+x)dx.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\log\left\{\frac{y}{a-x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}\right\}=C_1+\frac{B}{2ka^2}(a+x)^2.$$

Подставивъ сюда координаты начальнаго положенія точки M, мы найдемъ: $C_1=0$.

Такимъ образомъ получимъ слѣдующее уравненіе траэкторіи абсолютнаго движенія точки M:

$$y+\sqrt{(a-x)^2+y^2}=(a-x)\,e^{\theta},$$

гдѣ

$$\theta=\frac{B}{2ka^2}(a+x)^2.$$

Уравненіе этой кривой можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$y=\frac{(a-x)}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta})\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(271)$$

VIII-63.

ГЛАВА VIII.

Ускореніе абсолютнаго движенія точки.

§ 63. Что понимаютъ подъ именемъ ускоренія. Измѣренія и единицы ускоренія. Представленіе ускоренія длиною.

Ускореніе есть конечная величина, присущая всякому такому движенію точки, въ которомъ скорость измѣняетъ постепенно свою величину, или направленіе, или то и другое вмѣстѣ.

Прежде, чѣмъ дать точное опредѣленіе понятія объ ускореніи, примѣнимое какъ къ прямолинейному, такъ и къ криволинейному движенію точки, мы должны условиться относительно того, что слѣдуетъ понимать подъ именемъ *измѣненія скорости*.

Пусть движущаяся точка M имѣетъ въ моментъ t скорость v, величина и направленіе которой изображаются соотвѣтственнымъ радіусомъ векторомъ OU (черт. 20) годографа скорости; въ нѣкоторый позднѣйшій моментъ t_1 пусть точка имѣетъ скорость v_1, представляемую радіусомъ векторомъ OU_1 того же годографа.

Подъ измѣненіемъ скорости точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t_1 мы будемъ подразумѣвать геометрическую разность между скоростью v_1 и скоростью v, то есть, такую скорость, которую нужно геометрически сложить со скоростью v для того, чтобы получить скорость v_1.

Слѣдовательно, «измѣненіе скорости» есть также *скорость*; *величина и направленіе этой скорости представляются величиною и направленіемъ хорды UU_1, проведенной изъ точки U къ точкѣ U_1 годографа,* потому что эта хорда равняется геометрической разности между радіусомъ векторомъ OU_1 и радіусомъ векторомъ OU.

Въ движеніи точки скорость ея измѣняется не вдругъ, но постепенно, такъ что въ теченіи весьма малаго промежутка времени отъ t

VIII - 63.

до $(t+\vartheta)$ скорость v измѣняется на весьма малую скорость, представляемую весьма малою хордою $\overline{UU_1}$, соединяющею на годографѣ точки U и U_1, соотвѣтствующія моментамъ t и $(t+\vartheta)$.

При уменьшеніи промежутка времени ϑ и при приближеніи его къ нулю, уменьшается и приближается къ нулю хорда $\overline{UU_1}$, а направленіе ея приближается къ направленію касательной, проведенной въ точкѣ U къ годографу; отношеніе же скорости, представляемой хордою $\overline{UU_1}$, къ величинѣ промежутка времени ϑ приближается при этомъ къ нѣкоторому конечному предѣлу, называемому *величиною ускоренія точки въ моментъ* t; и такъ:

Величина ускоренія движущейся точки въ моментъ t есть величина предѣла:

$$\text{предѣлъ} \left[\frac{\text{скорость } \overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}, \quad \ldots\ldots \quad (272)$$

къ которому отношеніе между измѣненіемъ скорости въ теченіи промежутка времени ϑ, начинающагося въ моментъ t, и величиною самаго промежутка приближается при уменьшеніи величины послѣдняго до нуля.

Изъ этого опредѣленія видно также, что ускореніе имѣетъ размѣры скорости, дѣленной на время, а такъ какъ скорость сама имѣетъ размѣры длины, дѣленной на время, то *ускореніе имѣетъ размѣры длины, дѣленной на квадратъ времени.*

Радіусы же векторы годографа и длины его хордъ, хотя и представляютъ скорости, но сами суть длины; такъ, хорда $\overline{UU_1}$ есть длина, представляющая скорость во столько разъ большую единицы скорости, во сколько разъ сама хорда болѣе единицы длины; формулѣ (272), выражающей величину ускоренія, мы придадимъ болѣе правильный видъ, если введемъ символы: *д* и *в* (которыми мы уже пользовались на стр. 113 и слѣд.), обозначающіе единицы длины и времени, и представимъ эту формулу такъ:

$$\text{Величина ускоренія} = \frac{1}{в}\left(\text{пред.} \left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}\right). \quad . \; . \; . (273)$$

VIII-63.

Здѣсь $\overline{UU_1}$ означаетъ длину, скорость же, представляемая этою длиною, равна:

$$\frac{\partial}{в}\cdot\frac{\overline{UU_1}}{\partial}=\frac{\overline{UU_1}}{в}.$$

Въ этой формулѣ (273) мы можемъ замѣнить хорду дугою, ею стягиваемою, по слѣдующимъ причинамъ.

Въ курсахъ дифференціальнаго исчисленія доказывается, что длина хорды, стягивающей дугу безконечно-малой длины Δs, короче самой дуги на безконечно-малую величину третьяго порядка; а именно:

$$\text{хорда}=\Delta s-\frac{(\Delta s)^3}{24\rho^2}-\ldots;$$

далѣе слѣдуютъ члены, заключающіе высшія степени Δs; ρ — означаетъ длину радіуса кривизны кривой.

Примѣняя эту формулу къ дугѣ $\Delta\sigma$ годографа, стягиваемой хордою UU_1, мы получимъ:

$$UU_1=\Delta\sigma-\frac{(\Delta\sigma)^3}{24\rho^2}-\ldots;$$

а отсюда:

$$\text{пред.}\left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]=\text{пред.}\left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right]-\frac{(\Delta\sigma)^2}{24\rho^2}\,\text{пред.}\left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right]-\ldots\ldots$$

При приближеніи ϑ къ нулю, второй и слѣдующіе члены второй части этого равенства обращаются въ нуль, такъ какъ каждый изъ нихъ заключаетъ безконечно-малую величину $\Delta\sigma$ въ нѣкоторой степени; поэтому:

$$\text{пред.}\left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}=\text{пред.}\left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}.$$

На основаніи этого величина ускоренія можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$\text{Величина ускоренія}=\frac{1}{в}\left(\text{пред.}\left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}\right),$$

VIII-63.

или, употребляя обыкновенныя обозначенія дифференціальнаго исчисленія:

$$\text{Величина ускоренія} = \frac{1}{e}\frac{d\sigma}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (274)$$

гдѣ $d\sigma$ есть длина безконечно-малой дуги годографа, пробѣгаемая точкою U въ теченіи безконечно малаго промежутка времени отъ момента t до момента $t + dt$.

Такъ какъ $\frac{d\sigma}{dt}$ есть величина скорости точки U, чертящей годографъ, то послѣднее равенство выражаетъ слѣдующее:

Величина ускоренія движущейся точки въ какой либо моментъ времени равняется дѣленной на единицу времени величинѣ скорости, которую имѣетъ въ этотъ моментъ точка U, чертящая годографъ.

Мы выше показали, что ускореніе имѣетъ измѣренія или размѣры длины, дѣленной на квадратъ времени; подобно скорости, оно измѣряется особою единицею—единицею ускоренія.

Ускореніе равняется единицѣ тогда, когда скорость точки, описывающей годографъ, равняется единицѣ.

Чтобы дать болѣе наглядное понятіе объ единицахъ ускореній и объ размѣрахъ самихъ ускореній, мы остановимся на тѣхъ прямолинейныхъ движеніяхъ точки, въ которыхъ ускореніе имѣетъ постоянную величину.

Пусть точка M движется по прямой линіи такимъ образомъ, что разстояніе ея отъ нѣкоторой точки S_0 этой прямой линіи выражается слѣдующею формулою:

$$s = A + Bt + Ct^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (275)$$

гдѣ A есть постоянная величина, имѣющая измѣренія длины, B—постоянная величина, имѣющая измѣренія скорости, C—постоянная величина, имѣющая измѣренія длины, дѣленной на квадратъ времени.

Скорость этого движенія выражается формулою:

$$\frac{ds}{dt} = B + 2Ct.$$

VII-62.

или:

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{dt}=\frac{\beta}{(a-x)};\ \frac{df}{dt}=-k+\beta\frac{y}{f},$$

или:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}}=\frac{\beta}{k}\frac{dx}{(a-x)} \\ &\frac{df}{dt}=-k-\frac{\beta}{k}\left(\frac{dy}{dt}-\beta\right).\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (264)$$

Интегралъ перваго изъ этихъ уравненій даетъ уравненіе абсолютной траэкторіи:

$$y+\sqrt{(a-x)^2+y^2}=C_1(a-x)^{1-e}\ ,\ \ldots\ .\ (265)$$

гдѣ:

$$e=\frac{\beta}{k}.$$

Для опредѣленія постоянной, мы примемъ во вниманіе, что при $t=o$, $y=o$ и $x=-a$; подставивъ эти величины x и y въ полученное уравненіе, мы найдемъ:

$$C_1=(2a)^e.$$

Интегралъ втораго изъ уравненій (264) будетъ:

$$f=C_2+k(e^2-1)t-ey;\ \ldots\ldots\ (266)$$

по начальнымъ даннымъ найдемъ:

$$C_2=2a.$$

При $e=1$ оба равенства (266) и (265) тождественны; для опредѣленія другаго интеграла надо поступить также, какъ было поступлено въ примѣрѣ 37 для случая $c=v_0$.

При $e<1$ уравненіе (265) удовлетворяется координатами точки C ($x=a$, $y=0$); точка M приходитъ въ нее въ моментъ: $t=\frac{2a}{k(1-e^2)}$.

Примѣръ 40. Измѣняемая среда движется, какъ указано въ примѣрѣ 30; скорость относительнаго движенія точки M имѣетъ постоянную величину k и направлена параллельно оси X; начальныя данныя: $t=0$, $x=-a$, $y=0$. Движеніе происходитъ въ плоскости XY. Опредѣлить движеніе точки M абсолютное и относительное.

VII-62.

Такъ какъ скорость относительнаго движенія точки M направлена параллельно оси X и имѣетъ постоянную величину k, а скорость переноснаго движенія ея направлена параллельно оси $У$ и равна скорости той точки среды, съ которою совпадаетъ точка M, то, означивъ черезъ x и y абсолютныя координаты точки M, будемъ имѣть слѣдующія дифференціальныя уравненія для опредѣленія абсолютнаго движенія ея:

$$\frac{dx}{dt} = k, \; \frac{dy}{dt} = B\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Интегралъ перваго изъ нихъ есть:

$$x = C_1 + kt.$$

Такъ какъ при $t = 0$, $x = -a$, то $C_1 = -a$, а потому:

$$x = kt - a, \quad \dots\dots\dots \quad (267)$$

то есть проэкція точки M на ось X движется равномѣрно.

Подставивъ полученное выраженіе для x въ функціи t во второе изъ дифференціальныхъ уравненій и интегрируя его, мы получимъ:

$$\frac{dy}{dt} = B\left(\frac{2kt}{a} - \frac{k^2t^2}{a^2}\right)$$

$$y = C_2 + B\left(1 - \frac{kt}{3a}\right)\frac{kt^2}{a};$$

такъ какъ при $t = 0$, y равно 0, то $C_2 = 0$, а потому другой интегралъ въ окончательной формѣ будетъ слѣдующій:

$$y = B\left(1 - \frac{kt}{3a}\right)\frac{kt^2}{a} \quad \dots\dots\dots \quad (268)$$

Равенства (267) и (268) выражаютъ абсолютное движеніе точки M; по исключеніи времени изъ нихъ, мы получимъ уравненіе траэкторіи абсолютнаго движенія:

$$y = \frac{B}{3ka^2}(2a - x)(x + a)^2 \quad \dots\dots \quad (269)$$

Эта кривая изображена толстою чертою на чертежѣ (101); она имѣетъ точку перегиба въ E, гдѣ ее пересѣкаетъ ось $У$; въ точкахъ A и D она пересѣкаетъ границы среды ортогонально; обѣ половины ея, раздѣляемыя точкою E, тождественны по виду.

VII-62.

Поступая какъ въ примѣрѣ 34, мы можемъ построить систему линій, представляющихъ положенія траэкторіи относительнаго движенія въ различные моменты.

Начальныя координаты той точки среды, съ которою точка M совпадаетъ въ моментъ τ, выражаются такъ;

$$\mathfrak{a}=k\tau-a,\ \mathfrak{b}=B\left(\frac{2}{3}\frac{k\tau}{a}-1\right)\frac{k\tau^2}{a}.$$

Координаты этой точки среды въ моментъ t будутъ:

$$\mathfrak{x}=k\tau-a,\ \mathfrak{y}=B\frac{k\tau}{a}\left\{\left(2-\frac{k\tau}{a}\right)t+\left(\frac{2}{3}\frac{k\tau}{a}-1\right)\tau\right\}.$$

По исключеніи отсюда времени τ, мы получимъ уравненіе положенія относительной траэкторіи въ моментъ t:

$$\mathfrak{y}=\frac{B}{a^2}(\mathfrak{x}+a)\left\{\frac{(2\mathfrak{x}-a)}{3k}(\mathfrak{x}+a)+(a-\mathfrak{x})t\right\}\ .\ .\ (270)$$

На чертежѣ 101 изображены такія кривыя соотвѣтствующія семи моментамъ времени; $t=0,\ \frac{a}{3k},\ \frac{2a}{3k},\ \frac{a}{k},\ \frac{4a}{3k},\ \frac{5a}{3k},\ \frac{2a}{k}$; каждая кривая имѣетъ касательную параллельную оси X въ точкѣ пересѣченія ея съ траэкторіею абсолютнаго движенія.

Примѣръ 41. Движеніе среды — такое же какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; точка M, выйдя изъ точки A въ моментъ $t=0$, движется въ средѣ съ постоянною относительною скоростью k, направленною къ точкѣ C, координаты которой суть: $x=a$, $y=0$; опредѣлить траэкторію абсолютнаго движенія точки M.

Въ этомъ примѣрѣ придется интегрировать слѣдующія совокупныя дифференціальныя уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=k\frac{(a-x)}{f},\ \frac{dy}{dt}=-k\frac{y}{f}+B\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

гдѣ

$$f=\sqrt{(a-x)^2+y^2}.$$

Помножимъ второе изъ нихъ на $(a-x)$ и придадимъ къ нему первое, помноженное на y, затѣмъ все раздѣлимъ на $(a-x)^2$, получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{dt}=\frac{B}{a^2}(a+x);$$

или

$$\frac{d\left(\frac{y}{a-x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}}=\frac{B}{ka^2}(a+x)dx.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\log\left\{\frac{y}{a-x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{a-x}\right)^2}\right\}=C_1+\frac{B}{2ka^2}(a+x)^2.$$

Подставивъ сюда координаты начальнаго положенія точки M, мы найдемъ: $C_1=0$.

Такимъ образомъ получимъ слѣдующее уравненіе траекторіи абсолютнаго движенія точки M:

$$y+\sqrt{(a-x)^2+y^2}=(a-x)\,e^{\theta},$$

гдѣ

$$\theta=\frac{B}{2ka^2}(a+x)^2.$$

Уравненіе этой кривой можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$y=\frac{(a-x)}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta})\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(271)$$

VIII-63.

ГЛАВА VIII.

Ускореніе абсолютнаго движенія точки.

§ 63. Что понимаютъ подъ именемъ ускоренія. Измѣренія и единицы ускоренія. Представленіе ускоренія длиною.

Ускореніе есть конечная величина, присущая всякому такому движенію точки, въ которомъ скорость измѣняетъ постепенно свою величину, или направленіе, или то и другое вмѣстѣ.

Прежде, чѣмъ дать точное опредѣленіе понятія объ ускореніи, примѣнимое какъ къ прямолинейному, такъ и къ криволинейному движенію точки, мы должны условиться относительно того, что слѣдуетъ понимать подъ именемъ *измѣненія скорости*.

Пусть движущаяся точка M имѣетъ въ моментъ t скорость v, величина и направленіе которой изображаются соотвѣтственнымъ радіусомъ векторомъ OU (черт. 20) годографа скорости; въ нѣкоторый позднѣйшій моментъ t_1 пусть точка имѣетъ скорость v_1, представляемую радіусомъ векторомъ OU_1 того же годографа.

Подъ измѣненіемъ скорости точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t_1 мы будемъ подразумѣвать геометрическую разность между скоростью v_1 и скоростью v, то есть, такую скорость, которую нужно геометрически сложить со скоростью v для того, чтобы получить скорость v_1.

Слѣдовательно, «измѣненіе скорости» есть также *скорость*; *величина и направленіе этой скорости представляются величиною и направленіемъ хорды UU_1, проведенной изъ точки U къ точкѣ U_1 годографа,* потому что эта хорда равняется геометрической разности между радіусомъ векторомъ OU_1 и радіусомъ векторомъ OU.

Въ движеніи точки скорость ея измѣняется не вдругъ, но постепенно, такъ что въ теченіи весьма малаго промежутка времени отъ t

до $(t+\vartheta)$ скорость v измѣняется на весьма малую скорость, представляемую весьма малою хордою $\overline{UU_1}$, соединяющею на годографѣ точки U и U_1, соотвѣтствующія моментамъ t и $(t+\vartheta)$.

При уменьшеніи промежутка времени ϑ и при приближеніи его къ нулю, уменьшается и приближается къ нулю хорда $\overline{UU_1}$, а направленіе ея приближается къ направленію касательной, проведенной въ точкѣ U къ годографу; отношеніе же скорости, представляемой хордою $\overline{UU_1}$, къ величинѣ промежутка времени ϑ приближается при этомъ къ нѣкоторому конечному предѣлу, называемому *величиною ускоренія точки въ моментъ* t; и такъ:

Величина ускоренія движущейся точки въ моментъ t есть величина предѣла:

$$\text{предѣлъ}\left[\frac{\text{скорость } \overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}, \quad \ldots\ldots \quad (272)$$

къ которому отношеніе между измѣненіемъ скорости въ теченіи промежутка времени ϑ, начинающагося въ моментъ t, и величиною самаго промежутка приближается при уменьшеніи величины послѣдняго до нуля.

Изъ этого опредѣленія видно также, что ускореніе имѣетъ размѣры скорости, дѣленной на время, а такъ какъ скорость сама имѣетъ размѣры длины, дѣленной на время, то *ускореніе имѣетъ размѣры длины, дѣленной на квадратъ времени.*

Радіусы же векторы годографа и длины его хордъ, хотя и представляютъ скорости, но сами суть длины; такъ, хорда $\overline{UU_1}$ есть длина, представляющая скорость во столько разъ большую единицы скорости, во сколько разъ сама хорда болѣе единицы длины; формулѣ (272), выражающей величину ускоренія, мы придадимъ болѣе правильный видъ, если введемъ символы: $д$ и $в$ (которыми мы уже пользовались на стр. 113 и слѣд.), обозначающіе единицы длины и времени, и представимъ эту формулу такъ:

$$\text{Величина ускоренія} = \frac{1}{в}\left(\text{пред.}\left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta=0}\right) \ldots (273)$$

VIII-63.

Здѣсь $\overline{UU_1}$ означаетъ длину, скорость же, представляемая этою длиною, равна:

$$\frac{\partial}{в} \cdot \frac{\overline{UU_1}}{\partial} = \frac{\overline{UU_1}}{в}.$$

Въ этой формулѣ (273) мы можемъ замѣнить хорду дугою, ею стягиваемою, по слѣдующимъ причинамъ.

Въ курсахъ дифференціальнаго исчисленія доказывается, что длина хорды, стягивающей дугу безконечно-малой длины Δs, короче самой дуги на безконечно-малую величину третьяго порядка; а именно:

$$\text{хорда} = \Delta s - \frac{(\Delta s)^3}{24\rho^2} - \ldots ;$$

далѣе слѣдуютъ члены, заключающіе высшія степени Δs; ρ — означаетъ длину радіуса кривизны кривой.

Примѣняя эту формулу къ дугѣ $\Delta\sigma$ годографа, стягиваемой хордою UU_1, мы получимъ:

См. Т. стр. 347

$$UU_1 = \Delta\sigma - \frac{(\Delta\sigma)^3}{24\rho^2} - \ldots ;$$

а отсюда:

$$\text{пред.} \left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right] = \text{пред.} \left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right] - \frac{(\Delta\sigma)^2}{24\rho^2} \, \text{пред.} \left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right] - \ldots \ldots$$

При приближеніи ϑ къ нулю, второй и слѣдующіе члены второй части этого равенства обращаются въ нуль, такъ какъ каждый изъ нихъ заключаетъ безконечно-малую величину $\Delta\sigma$ въ нѣкоторой степени; поэтому:

$$\text{пред.} \left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta = 0} = \text{пред.} \left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right]_{\vartheta = 0}.$$

На основаніи этого величина ускоренія можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$\text{Величина ускоренія} = \frac{1}{в} \left(\text{пред.} \left[\frac{\Delta\sigma}{\vartheta}\right]_{\vartheta = 0}\right),$$

VIII-43.

или, употребляя обыкновенныя обозначенія дифференціальнаго исчисленія:

$$\text{Величина ускоренія} = \frac{1}{в}\frac{d\sigma}{dt}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (274)$$

гдѣ $d\sigma$ есть длина безконечно-малой дуги годографа, пробѣгаемая точкою U въ теченіи безконечно малаго промежутка времени отъ момента t до момента $t + dt$.

Такъ какъ $\frac{d\sigma}{dt}$ есть величина скорости точки U, чертящей годографъ, то послѣднее равенство выражаетъ слѣдующее:

Величина ускоренія движущейся точки въ какой либо моментъ времени равняется дѣленной на единицу времени величинѣ скорости, которую имѣетъ въ этотъ моментъ точка U, чертящая годографъ.

Мы выше показали, что ускореніе имѣетъ измѣренія или размѣры длины, дѣленной на квадратъ времени; подобно скорости, оно измѣряется особою единицею—единицею ускоренія.

Ускореніе равняется единицѣ тогда, когда скорость точки, описывающей годографъ, равняется единицѣ.

Чтобы дать болѣе наглядное понятіе объ единицахъ ускореній и объ размѣрахъ самихъ ускореній, мы остановимся на тѣхъ прямолинейныхъ движеніяхъ точки, въ которыхъ ускореніе имѣетъ постоянную величину.

Пусть точка M движется по прямой линіи такимъ образомъ, что разстояніе ея отъ нѣкоторой точки S_0 этой прямой линіи выражается слѣдующею формулою:

$$s = A + Bt + Ct^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (275)$$

гдѣ A есть постоянная величина, имѣющая измѣренія длины, B—постоянная величина, имѣющая измѣренія скорости, C—постоянная величина, имѣющая измѣренія длины, дѣленной на квадратъ времени.

Скорость этого движенія выражается формулою:

$$\frac{ds}{dt} = B + 2Ct.$$

VIII-63.

Годографъ есть прямая линія, проходящая черезъ начало координатъ и параллельная траэкторіи точки M; разстояніе σ точки U, чертящей годографъ, отъ начала координатъ равняется скорости точки M, помноженной на единицу времени, то есть:

$$\sigma = (B + 2Ct)\mathfrak{e}.$$

По формулѣ (274) мы найдемъ, что величина ускоренія равна:

$$\frac{1}{\mathfrak{e}}\frac{d\sigma}{dt} = 2C,$$

то есть величина ускоренія постоянна и равняется удвоенному коэффиціенту C.

Прямолинейное движеніе съ постояннымъ ускореніемъ называется, какъ извѣстно, *равномѣрно ускореннымъ*, если скорость точки M непрерывно возрастаетъ, и *равномѣрно замедленнымъ*, если скорость непрерывно убываетъ.

Мы не входимъ здѣсь въ подробное разсмотрѣніе свойствъ равноускоренныхъ и равнозамедленныхъ прямолинейныхъ движеній, такъ какъ это дѣлается съ достаточною подробностью въ начальныхъ курсахъ Физики; мы обратимъ вниманіе только на такое равноускоренное движеніе, въ которомъ ускореніе равняется единицѣ.

Возьмемъ такое равноускоренное движеніе, въ которомъ въ начальный моментъ скорость равна нулю и въ которомъ точка M проходитъ въ первую единицу времени длину равную половинѣ единицы длины; ускореніе въ этомъ движеніи равняется единицѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы при $t=0$ скорость точки M равнялась нулю, необходимо, чтобы B равнялась нулю; далѣе, изъ формулы (275) слѣдуетъ, что длина пути, пройденнаго точкою въ теченіи времени t отъ начала движенія, выражается такъ:

$$l = s - A = Ct^2;$$

длина пути, пройденнаго точкою M въ теченіи первой единицы времени отъ начала движенія, выразится такъ:

$$C\,(\text{единица времени})^2 = C\mathfrak{e}^2;$$

такъ какъ это должно равняться половинѣ единицы длины, то должно быть:

$$2C = \frac{(\text{единица длины})}{(\text{единица времени})^2} = \frac{д}{в^2}.$$

Такъ выражается величина ускоренія въ этомъ движеніи, потому что, какъ видѣли выше, $2C$ представляетъ величину ускоренія въ равноускоренномъ движеніи; что въ разсматриваемомъ движеніи ускореніе равно единицѣ, видно изъ того, что скорость точки U, описывающей годографъ, равна:

$$2\,Cв = \frac{д}{в} = (\text{единицѣ скорости}).$$

Отсюда видно, что величина единицы ускоренія имѣетъ слѣдующій символъ:

$$(\text{единица ускоренія}) = \frac{(\text{единица длины})}{(\text{единица времени})^2}$$

и что *единицу ускоренія имѣетъ точка, вышедшая въ моментъ* $t = 0$ *изъ покоя и движущаяся прямолинейно и равноускоренно такимъ образомъ, что въ первую единицу времени проходитъ половину единицы длины пути.*

Величина всякаго ускоренія выражается произведеніемъ изъ нѣкотораго отвлеченнаго числа на единицу ускоренія; одно и то же ускореніе можетъ выражаться различными отвлеченными числами, смотря потому, что мы возьмемъ за единицу длины и что—за единицу времени.

Если возьмемъ метръ и секунду средняго времени, то величина ускоренія, которое имѣетъ всякая точка твердаго тѣла, свободно и безъ вращенія падающаго въ Парижѣ на уровнѣ моря, выражается такъ:

$$g = 9{,}8094\ \frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},$$

потому что каждая точка тѣла пробѣгаетъ въ первую секунду послѣ начала паденія 4,9047 метра.

VIII-63.

Если за единицу времени возьмемъ минуту, а за единицу длины—дециметръ, то новая единица ускоренія:

$$\frac{\text{(дециметръ)}}{\text{(минута)}^2}$$

будетъ въ 36000 разъ менѣе прежней, какъ не трудно видѣть изъ слѣдующаго равенства:

$$\frac{\text{(метръ)}}{\text{(секунда)}^2} = \frac{10.\text{(дециметръ)}}{\left(\frac{1}{60}\right)^2 \text{(минута)}^2} = 36000\frac{\text{(децим.)}}{\text{(минут.)}^2};$$

поэтому тоже самое ускореніе g выразится числомъ въ 36000 разъ большимъ прежняго:

$$g = 353138{,}4\,\frac{\text{децим.}}{\text{(минут.)}^2}.$$

Подобнымъ же образомъ можно перейдти къ выраженію ускоренія въ другихъ единицахъ ускоренія, при которыхъ единицею длины служитъ футъ какого либо государства, или другая мѣра длины.

Съ нѣкоторыхъ поръ въ научныхъ изслѣдованіяхъ принято принимать за единицу ускоренія величину:

$$\frac{\text{(сантиметръ)}}{\text{(секунда)}^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (276)$$

въ которой:

$$g = 980{,}94\,\frac{\text{сант.}}{\text{(сек.)}^2}\text{*)}.$$

Подобно скорости, ускореніе изображаютъ длиною, заключающею столько единицъ длины и частей ея, сколько въ величинѣ представляемаго ею ускоренія заключается единицъ ускоренія и частей ея; эту длину представляютъ себѣ проведенною изъ мѣста точки M параллельно скорости точки U на годографѣ; направленіе этой скорости принимается за направленіе ускоренія.

---

*) Ускореніе силы тяжести въ какомъ либо мѣстѣ земной поверхности подъ широтою λ и на высотѣ h сантиметровъ надъ уровнемъ моря равняется:

$$g = (980{,}6056 - 2{,}5028\cos 2\lambda - 0{,}000003h)\frac{\text{сант.}}{\text{(сек)}^2}.$$

VIII-63.64.

Такимъ образомъ ускоренію, подобно скорости, мы приписываемъ не только величину, но и направленіе.

Величина ускоренія движущейся точки въ какой либо моментъ времени равняется дѣленной на единицу времени величинѣ скорости, которую имѣетъ въ этотъ моментъ точка U, чертящая годографъ; направленіе ускоренія есть направленіе этой скорости.

Величину и направленіе ускоренія какой либо точки мы будемъ обозначать тою же самою буквою, которою мы обозначаемъ скорость ея, но только съ точкою надъ буквою; такъ:

$$\dot{v}$$

будетъ обозначать величину и направленіе ускоренія въ абсолютномъ движеніи точки M.

Изъ всего сказаннаго въ этомъ параграфѣ видно, что ускореніе можно охарактеризовать слѣдующими словами: это есть величина, опредѣляющая быстроту и направленіе измѣненія скорости въ разсматриваемый моментъ.

§ 64. Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи. Проэкціи ускоренія на оси координатъ въ какомъ бы то ни было абсолютномъ движеніи точки.

Въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи ускореніе равно нулю, такъ какъ скорость точки не измѣняется ни по величинѣ, ни по направленію.

Въ прямолинейномъ неравномѣрномъ движеніи точки годографъ есть прямая линія, параллельная прямолинейной траэкторіи точки, поэтому ускореніе направлено вдоль по линіи движенія, въ сторону движенія или въ противоположную сторону.

Выберемъ на прямой линіи нѣкоторую постоянную точку S_0 и одно изъ двухъ направленій прямой, выходящихъ изъ этой точки, примемъ за положительное, противоположное — за отрицательное.

Означимъ черезъ s разстояніе точки M отъ S_0; s есть положительная или отрицательная длина, смотря потому, находится ли M

VIII - 64.

по отношенію къ S_0 на положительной или на отрицательной сторонѣ прямой.

Производная $\frac{ds}{dt}$ представляетъ тогда скорость точки M по положительному направленію прямолинейной траэкторіи.

Длина:

$$\sigma = \theta \cdot \frac{ds}{dt}$$

представляетъ разстояніе точки U, чертящей прямолинейный годографъ, отъ начала координатъ, черезъ которое онъ проходитъ; разстояніе σ будетъ положительною или отрицательною длиною, смотря потому, направлено ли $\overline{OU}$ параллельно положительному или отрицательному направленію прямолинейной траэкторіи.

Ускореніе прямолинейнаго движенія выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\dot{v} = \frac{1}{\theta}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (277)$$

оно можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, направлено ли оно въ положительную или въ отрицательную сторону прямолинейной траэкторіи.

Если точка M движется по оси X и положенія ея на этой оси выражаются разстояніями ея x отъ начала координатъ, то ускореніе ея выражается, согласно съ предыдущею формулою, второю производною отъ x по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2};$$

если эта величина положительная, то ускореніе направлено въ сторону положительной оси X, если же она отрицательная, то ускореніе направлено въ сторону отрицательной оси X.

Напримѣръ, если точка M движется по оси X по закону:

$$x = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right),$$

то ускореніе ея—слѣдующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}x\,.$$

VIII-64.

это выраженіе показываетъ, что, когда точка находится на положительной сторонѣ оси X, тогда ускореніе ея направлено въ сторону отрицательной оси, когда же точка находится на отрицательной оси X, то ускореніе ея направлено въ сторону положительной оси; слѣдовательно во всякомъ положеніи точки ускореніе ея направлено къ началу координатъ.

Величина же ускоренія въ этомъ движеніи пропорціональна разстоянію точки отъ начала координатъ.

Б. **Обратимся къ криволинейному движенію точки.**

Ускореніе, представленное длиною, можетъ быть проэктируемо подобно скорости на всякое направленіе и на всякую плоскость. Составимъ выраженія проэкцій ускоренія на неподвижныя оси координатъ.

Такъ какъ ускореніе имѣетъ направленіе скорости точки U, чертящей годографъ, и величина его равняется величинѣ этой скорости, дѣленной на θ, то намъ нужно будетъ составить выраженія проэкцій этой скорости на сказанныя оси.

Координаты точки U, чертящей годографъ, равняются проэкціямъ на оси X, $У$, Z длины, представляющей скорость точки; то есть координаты ея суть:

$$\theta x' = \theta\,\frac{dx}{dt},\quad \theta y' = \theta\,\frac{dy}{dt},\quad \theta z' = \theta\,\frac{dz}{dt},\ ^{*)}$$

слѣдовательно проэкціи на оси X, $У$, Z скорости этой точки U выразятся такъ:

$$\theta\,.\,\frac{d^2x}{dt^2},\ \theta\,.\,\frac{d^2y}{dt^2},\ \theta\,.\,\frac{d^2z}{dt^2};$$

проэкціи же на оси координатъ ускоренія движущейся точки M выразятся, поэтому, вторыми производными отъ координатъ по времени.

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v},X) &= \frac{d^2x}{dt^2} = x'' \\ \dot{v}\cos(\dot{v},У) &= \frac{d^2y}{dt^2} = y'' \\ \dot{v}\cos(\dot{v},Z) &= \frac{d^2z}{dt^2} = z'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (278)$$

*) Въ главѣ I-й, на стр. 39 и слѣдующихъ за ней, мы не ввели символа единицы времени въ выраженія координатъ точки U; присутствіе его мы тамъ только подразумѣвали, здѣсь же ставимъ его ясно.

VIII-64.

Изъ этихъ равенствъ мы получимъ слѣдующее выраженіе величины ускоренія въ криволинейномъ движеніи:

$$\dot{v} = +\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (279)$$

Вторыя производныя x'', y'', z'' имѣютъ еще иное значеніе: это суть ускоренія тѣхъ прямолинейныхъ движеній по осямъ X, $У$, Z, которыя совершаютъ проэкціи точки M на эти оси; слѣдовательно равенства (278) выражаютъ, что *проэкціи ускоренія движущейся точки M на оси координатъ X, У, Z равняются ускореніямъ проэкцій точки M на эти оси.*

Кромѣ того изъ равенствъ (278) и (279) видно, что *ускореніе точки M представляется, по величинѣ и по направленію, діагональю параллелопипеда, имѣющаго вершину въ точкѣ M и ребра равныя и параллельныя ускореніямъ проэкцій точки M на оси координатъ.*

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\overline{\dot{v}} = \overline{x''} + \overline{y''} + \overline{z''}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (280)$$

то есть, что ускореніе $\dot{v}$ есть геометрическая сумма ускореній x'', y'', z'' или что эти четыре ускоренія имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій равныхъ и параллельныхъ имъ можно составить замкнутый четыреугольникъ; этотъ четыреугольникъ конечно не плоскій.

Если извѣстны выраженія координатъ точки M въ функціяхъ времени, то, по формуламъ (278) и (279), мы имѣемъ возможность выразить функціями времени величину и направленіе ускоренія точки M.

Такъ, въ примѣрахъ 2 и 3-мъ мы найдемъ, что ускореніе направлено параллельно оси $У$ и имѣетъ постоянную величину g.

Предлагаемъ опредѣлить величину и направленіе ускоренія при движеніяхъ точки M, указанныхъ въ задачахъ №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Окажется: въ № 1, что ускореніе направлено вдоль по прямолинейной траэкторіи движущейся точки;

VIII — 64.65.

въ № 2, что ускореніе направлено къ началу координатъ и равно $\omega^2 r$, гдѣ r есть разстояніе точки M отъ начала координатъ;

въ № 3 и 4, что ускореніе направлено по продолженію радіуса вектора, проведеннаго изъ начала координатъ къ точкѣ M и равно $k^2 r$, гдѣ $r = \overline{OM}$;

въ № 5 — тоже, что и въ № 2;

въ № 6, что проэкція ускоренія на ось Y имѣетъ постоянную величину $2b^2$, проэкція же его на ось X возрастаетъ пропорціонально времени $(x'' = 6at)$;

въ № 7, что:

$$y'' = -kv\cos(vy),\ z'' = -g - kv\cos(vz),$$

то есть, что ускореніе есть діагональ параллелограмма, построеннаго на ускореніи g, параллельномъ отрицательной оси Z, и на ускореніи равномъ kv и направленномъ противоположно скорости точки M.

§ 65. Ускореніе заключается въ плоскости кривизны траэкторіи.

A. Мы видѣли, что при прямолинейномъ движеніи точки ускореніе направлено вдоль по самой прямой, такъ что направленіе его въ этихъ случаяхъ или совпадаетъ съ направленіемъ скорости, или противоположно направленію послѣдней.

При криволинейномъ движеніи точки направленіе ускоренія можетъ быть перпендикулярно или наклонно къ направленію скорости; такъ, напримѣръ, если точка движется съ постоянною скоростью a по окружности, то ускореніе ея перпендикулярно къ скорости, что мы сейчасъ докажемъ.

Въ § 15, на стр. 40 было показано, что въ этомъ случаѣ годографъ есть окружность, имѣющая центръ въ началѣ координатъ O и радіусъ равный величинѣ скорости a точки M. Такъ какъ радіусъ векторъ OU точки U параллеленъ скорости a, которая перпендикулярна къ радіусу CM, а послѣдній равномѣрно вращается вокругъ C въ сторону, указанную на чертежѣ 102 неоперенною стрѣлкою, то и радіусъ векторъ OU вращается вокругъ точки O съ тою же постоянною угловою скоростью въ сторону, указанную на чертежѣ 102 оперенною стрѣлкою; поэтому скорость $U\dot{V}$

VIII-65.

(черт. 102) точки U годографа равна $\overline{OU}_\omega = a\omega$, гдѣ ω есть угловая скорость радіуса вектора $CM = R$; а, слѣдовательно, ускореніе точки M имѣетъ слѣдующую величину:

$$\dot{v} = a\omega = a\frac{a}{R} = \frac{a^2}{R}, \qquad \omega = \frac{a}{R}$$

такъ какъ угловая скорость ω равна скорости a, дѣленной на R.

На чертежѣ 102 видно, что скорость точки U направлена противоположно направленію радіуса вектора CM; и такъ: *при равномѣрномъ движеніи точки по окружности ускореніе ея направлено къ центру окружности и равно квадрату скорости точки, дѣленному на радіусъ окружности.*

Очевидно, что если траэкторія точки есть кривая плоская, то ускореніе заключается въ плоскости кривой.

Б. Мы теперь докажемъ, что если траэкторія кривой есть кривая не плоская, (витая), то *ускореніе заключается въ плоскости кривизны кривой.*

уже и неравномерном движении

Плоскостью кривизны кривой линіи въ какой либо точкѣ ея M мы называемъ предѣльное положеніе, къ которому плоскость, проведенная черезъ касательную къ кривой въ точкѣ M параллельно касательной въ точкѣ M_1, близкой къ M, приближается при приближеніи точки M_1 къ точкѣ M до ихъ совпаденія.

Когда траэкторія есть не плоская (витая) кривая, тогда радіусъ векторъ годографа описываетъ коническую поверхность, вершина которой есть начало координатъ, а направляющая — годографъ; радіусы векторы годографа суть производящія этой конической поверхности.

Пусть OU есть радіусъ векторъ годографа, соотвѣтствующій точкѣ M на траэкторіи, а OU_1 есть радіусъ векторъ, соотвѣтствующій точкѣ M_1 траэкторіи; очевидно, что сѣкущая плоскость сказанной конической поверхности, проведенная черезъ производящія OU и OU_1 будетъ параллельна плоскости, проведенной черезъ касательную къ траэкторіи въ точкѣ M параллельно касательной въ точкѣ M_1.

При приближеніи точки M_1 къ точкѣ M, вторая плоскость будетъ приближаться къ плоскости кривизны траэкторіи въ точкѣ

VIII - 65. 66.

M; вмѣстѣ съ тѣмъ параллельная ей сѣкущая плоскость конической поверхности будетъ приближаться къ касательной плоскости, проведенной къ этой поверхности черезъ производящую OU, такъ какъ приближеніе точки M_1 къ точкѣ M влечетъ за собою приближеніе производящей OU_1 къ производящей OU.

Изъ этого слѣдуетъ, что плоскость кривизны траэкторіи въ точкѣ M параллельна къ касательной плоскости, проведенной къ конической поверхности чрезъ производящую OU.

Но въ этой плоскости заключается скорость точки U годографа; поэтому въ плоскости кривизны точки M траэкторіи заключается ускореніе, которое имѣетъ движущаяся точка въ этой точкѣ траэкторіи.

§ 66. Ускореніе въ движеніи точки съ постоянною скоростью по какой бы то ни было траэкторіи.

A. Если точка движется по какой бы то ни было траэкторіи, плоской или не плоской (витой), съ постоянною скоростью, то радіусъ векторъ годографа имѣетъ постоянную величину, слѣдовательно, скорость точки U, описывающей годографъ, имѣетъ тогда направленіе, перпендикулярное къ радіусу вектору OU точки U (черт. 103), стало быть тогда ускореніе перпендикулярно къ скорости движущейся точки или къ касательной къ траэкторіи; говоря иначе: въ этихъ случаяхъ ускореніе заключается въ нормальной плоскости къ кривой.

Но ускореніе заключается въ то же время и въ плоскости кривизны траэкторіи; значитъ оно находится на линіи пересѣченія плоскости кривизны съ нормальною плоскостью.

Эта линія называется *главною нормалью* кривой линіи въ разсматриваемой точкѣ.

Изъ точки на кривой по главной нормали можно провести два прямопротивоположныя направленія, одно: MN (черт. 103) въ ту сторону, куда кривая вогнута, другое: MN' въ ту сторону, куда кривая выпукла.

Не трудно сообразить, что ускореніе должно быть направлено вдоль по первой части MN нормали, а не по второй, такъ какъ

16*

VIII-66.

въ сторону вогнутости траэкторіи направлено измѣненіе скорости, а слѣдовательно и направленіе скорости UV (черт. 103) годографа.

И такъ, если точка движется по какой бы то ни было траэкторіи съ постоянною скоростью, то ускореніе въ каждой точкѣ траэкторіи имѣетъ направленіе той части главной нормали кривой въ этой точкѣ, которая находится по вогнутую сторону кривой.

Формулы (278) и (279) послужатъ намъ для опредѣленія величины ускоренія; но прежде мы нѣсколько измѣнимъ ихъ видъ.

Выберемъ на траэкторіи нѣкоторую постоянную точку S_0, отъ которой будемъ считать разстоянія по траэкторіи.

Означимъ черезъ s разстояніе движущейся точки отъ S_0; s есть положительная или отрицательная длина, смотря потому, находится ли движущаяся точка по отношенію къ S_0 на положительной или отрицательной сторонѣ траэкторіи.

Пусть s_0 есть разстояніе движущейся точки въ моментъ $t=0$; такъ какъ эта точка движется съ постоянною скоростью a, то разстояніе ея отъ S_0 въ моментъ t будетъ имѣть слѣдующую величину:

$$s = s_0 \pm at\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (281)$$

гдѣ знакъ $+$ долженъ быть взятъ при движеніи, направленномъ въ положительную сторону траэкторіи, а знакъ ($-$) при движеніи, направленномъ въ отрицательную сторону ея.

Если координаты движущейся точки выражены функціями времени:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),$$

то, при помощи равенства (281), мы можемъ выразить ихъ функціями s:

$$x = f_1\left(\frac{s-s_0}{\pm a}\right),\ y = f_2\left(\frac{s-s_0}{\pm a}\right),\ z = f_3\left(\frac{s-s_0}{\pm a}\right),\ \ldots\ldots \quad (282)$$

причемъ должно имѣть въ виду, что s есть функція времени, выражаемая равенствомъ (281).

Такимъ образомъ x, y, z можно разсматривать какъ функціи отъ s, которое есть функція отъ t; поэтому первыя и вторыя производ-

VIII-66.

ныя координатъ по времени можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \pm a\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{d^2t} = \pm a\frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dt} = a^2\frac{d^2x}{ds^2};$$

слѣдовательно, при постоянной скорости, мы можемъ выраженія (278) и (279) представить слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}\,X) &= a^2\frac{d^2x}{ds^2} \\ \dot{v}\cos(\dot{v}\,Y) &= a^2\frac{d^2y}{ds^2} \\ \dot{v}\cos(\dot{v}\,Z) &= a^2\frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (283)$$

$$\dot{v} = a^2\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (284)$$

Б. Чтобы понять смыслъ этихъ выраженій, надо припомнить значеніе и аналитическое выраженіе такъ называемаго радіуса кривизны кривой.

Среднею кривизною дуги кривой, заключающеюся между точками M *и* M_1 *ея*, называется отношеніе угла, образуемаго направленіями OU и OU_1, параллельными касательнымъ линіямъ къ кривой въ точкахъ M и M_1, къ длинѣ дуги кривой, заключающейся между этими точками.

Кривизна кривой въ точкѣ M есть предѣлъ, къ которому, при приближеніи точки M_1 къ точкѣ M, приближается средняя кривизна дуги MM_1.

Означимъ чрезъ $d\varepsilon$ *уголъ смежности* въ точкѣ M, то есть безконечно малый уголъ между направленіями касательныхъ, проведенныхъ въ безконечно-близкихъ точкахъ M и M_1 на кривой, а черезъ ds длину безконечно-малой дуги MM_1; кривизна кривой въ точкѣ M выразится такъ:

$$\text{кривизна въ } M = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

VIII-66.

Уголъ смежности представляется угломъ между безконечно-близкими радіусами векторами OU и OU_1 годографа скорости точки, движущейся по кривой; если скорость точки имѣетъ постоянную величину a, то уголъ между безконечно-близкими радіусами векторами OU и OU_1 измѣряется отношеніемъ безконечно-малой дуги $d\sigma$, заключающейся между точками U и U_1, къ длинѣ радіуса вектора OU, равной a единицамъ длины: то есть:

$$d\varepsilon = \frac{1}{в}\frac{d\sigma}{a};$$

поэтому:

$\rho = \frac{a\,ds}{d\sigma}$

$$\text{кривизна въ точкѣ } M = \frac{1}{в}\frac{d\sigma}{a\,ds} \quad \ldots\ldots \quad (285)$$

Кругъ имѣетъ постоянную кривизну на протяженіи всей кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, въ кругѣ уголъ смежности равняется углу между соотвѣтственными радіусами круга; длина же дуги окружности равняется величинѣ угла между радіусами, помноженной на длину радіуса, поэтому:

$$\text{кривизна круга} = \frac{d\varepsilon}{R d\varepsilon} = \frac{1}{R};$$

то есть кривизна круга равняется единицѣ дѣленной на величину его радіуса.

Вообще, кривизна какой либо кривой въ какой либо точкѣ ея равняется единицѣ дѣленной на нѣкоторую длину, величина которой называется величиною *радіуса кривизны кривой* въ этой точкѣ.

Представимъ себѣ кругъ, касательный къ кривой въ разсматриваемой точкѣ, находящійся въ плоскости кривизны этой точки, имѣющій центръ по вогнутую сторону кривой и обладающій тою же самою кривизною, какую имѣетъ кривая въ разсматриваемой точкѣ; величина радіуса этого круга будетъ равна величинѣ радіуса кривизны кривой въ разсматриваемой точкѣ ея.

Направленіемъ радіуса кривизны кривой въ разсматриваемой точкѣ называется то направленіе главной нормали, которое идетъ къ

VIII-66.

центру вышесказаннаго круга. Этотъ центръ называется *центромъ кривизны кривой* въ разсматриваемой точкѣ.

Величину и направленіе радіуса кривизны мы будемъ означать буквою ρ.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что направленіе радіуса кривизны совпадаетъ съ направленіемъ ускоренія, которое имѣетъ движущаяся по кривой точка въ томъ случаѣ, когда скорость ея имѣетъ постоянную величину.

Величина же радіуса кривизны, на основаніи формулы (285), можетъ быть выражена такъ:

$$\rho = в\,\frac{a ds}{d\sigma} = в.a\,\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{a^2}{\dot{v}},$$

потому что $\frac{ds}{dt}$ равняется величинѣ скорости, а $\frac{1}{в}\frac{d\sigma}{dt}$ равняется величинѣ ускоренія.

Подставивъ $\dot{v}\rho$ вмѣсто a^2 въ формулы (283) и (284) и имѣя въ виду, что направленіе ρ совпадаетъ съ направленіемъ ускоренія, выражаемаго этими формулами, мы получимъ слѣдующія выраженія, доказываемыя въ приложеніи дифференціальнаго исчисленія къ геометріи:

$$\cos(\rho X) = \rho\frac{d^2x}{ds^2},\ \cos(\rho Y) = \rho\frac{d^2y}{ds^2},\ \cos(\rho Z) = \rho\frac{d^2z}{ds^2},\ \ldots (286)$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \ldots\ldots (287)$$

Величину и направленіе ускоренія точки, имѣющей постоянную скорость, мы можемъ выразить теперь такъ:

Если точка движется съ постоянною скоростью, то направленіе ускоренія ея въ какой либо точкѣ траэкторіи совпадаетъ съ направленіемъ радіуса кривизны въ этой точкѣ, а величина ускоренія равняется квадрату скорости, дѣленному на величину радіуса кривизны.

VIII-67.

§ 67. Проэкціи ускоренія на касательную и главную нормаль.

Представимъ себѣ, что точка движется какимъ бы то ни было образомъ по какой бы то ни было траэкторіи.

Пусть:

$$x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

есть уравненія, выражающія движеніе точки.

Пусть s суть разстоянія, считаемыя по траэкторіи, движущейся точки отъ нѣкоторой постоянной точки S_0, взятой на траэкторіи; означимъ черезъ s_0 такое разстояніе въ начальный моментъ: $t=0$.

Координаты x, y, z можно выразить функціями разстоянія s, если послѣднее будетъ выражено функціею t; послѣднее же можно сдѣлать нижеслѣдующимъ образомъ:

Мы составляемъ выраженіе:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{[f_1'(t)]^2+[f_2'(t)]^2+[f_3'(t)]^2},$$

въ которомъ корню приписываемъ знакъ $+$ для тѣхъ моментовъ, въ которые скорость точки направлена въ положительную сторону траэкторіи.

Интегрируемъ это равенство въ предѣлахъ отъ $t=0$ до t, получимъ требуемое выраженіе s въ функціи времени:

$$s=s_0+\int_0^t dt\sqrt{[f_1'(t)]^2+[f_2'(t)]^2+[f_3'(t)]^2} \ldots \quad (288)$$

По исключеніи времени изъ этого равенства и изъ равенствъ (1), мы получимъ выраженія для x, y, z въ функціяхъ отъ s, причемъ надо имѣть въ виду, что s есть функція времени, выражаемая равенствомъ (288).

По этимъ причинамъ первыя и вторыя производныя отъ координатъ движущейся точки по времени можно представить въ нижеслѣдующемъ видѣ:

VIII-67.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}; \quad \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}; \quad \ldots\ldots$$

Слѣдовательно равенства (278) представятся такъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}X)=\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}; \quad \ldots\ldots$$

Вмѣсто вторыхъ производныхъ координатъ по дугѣ s мы можемъ сюда подставить равныя имъ величины изъ (286); квадратъ производной отъ s по t можемъ замѣнить квадратомъ скорости точки; что же касается до остальныхъ производныхъ, то надо имѣть въ виду два противоположные случая: а) если скорость направлена въ положительную сторону траэкторіи, то:

$$\frac{ds}{dt}=v,\ \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt},\ \frac{dx}{ds}=\cos(vX)\ , \quad \ldots$$

б) если скорость направлена въ отрицательную сторону траэкторіи, то:

$$\frac{ds}{dt}=-v,\ \frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{dv}{dt},\ \frac{dx}{ds}=-\cos(vX)\ , \quad \ldots$$

слѣдовательно во всякомъ случаѣ:

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\cos(vX)\ , \quad \ldots\ldots$$

Такимъ образомъ мы получаемъ, вмѣсто (278), слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned}\dot{v}\cos(\dot{v}X)&=\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho X)+\frac{dv}{dt}\cos(vX)\\ \dot{v}\cos(\dot{v}Y)&=\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho Y)+\frac{dv}{dt}\cos(vY)\\ \dot{v}\cos(\dot{v}Z)&=\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho Z)+\frac{dv}{dt}\cos(vZ)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \quad (289)$$

которыя выражаютъ, что *ускоренiе* $\dot{v}$ *есть дiагональ прямоугольника, стороны котораго суть:*

VIII-67. 68. 69.

ускореніе $(v^2 : \rho)$, *отложенное къ центру кривизны,*
ускореніе $\frac{dv}{dt}$, *отложенное по направленію скорости если* $\frac{dv}{dt} > 0$, *и по направленію противоположному скорости, если* $\frac{dv}{dt} < 0$.

Поэтому $\frac{v^2}{\rho}$ *есть проэкція ускоренія на направленіе главной нормали и* $\frac{dv}{dt}$ *— проэкція на направленіе касательной.*

Величина ускоренія можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$\dot{v} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (290)$$

Ускореніе всегда направлено въ сторону вогнутости кривой.

На чертежѣ 104 представленъ случай, когда $\frac{dv}{dt} > 0$, на чертежѣ 105—случай, когда $\frac{dv}{dt} < 0$.

§ 68. Проэкціи ускоренія на неподвижныя направленія.

Аналогично съ выраженіями (8) § 13, проэкціи ускоренія на оси координатъ X, Y, Z можно представить слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}X) &= \frac{d^2(r\cos(rX))}{dt^2} \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Y) &= \frac{d^2(r\cos(rY))}{dt^2} \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Z) &= \frac{d^2(r\cos(rZ))}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (291)$$

и, вообще, если P есть какое либо неподвижное въ пространствѣ направленіе, то:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}P) = \frac{d^2(r\cos(rP))}{dt^2} \quad \ldots\ldots (292)$$

§ 69. Проэкція ускоренія на подвижное направленіе.

Проэкція ускоренія на какое либо направленіе П, измѣняющееся въ пространствѣ, равна проэкціи скорости годографа на то же направленіе; поэтому, для того, чтобы составить выраженіе такой проэкціи, воспользуемся выраженіемъ (14) стр. 30:

VIII – 69.70.

$$v \cos(v\Pi) = \frac{d(r \cos(r\Pi))}{dt} - rv_\pi \cos(rv_\pi),$$

которое примѣнимъ къ радіусу вектору и скорости точки, описывающей годографъ; для этого замѣнимъ въ этомъ выраженіи: радіусъ векторъ r — скоростью v и скорость v — ускореніемъ $\dot{v}$, тогда получимъ слѣдующую общую формулу:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\Pi) = \frac{d(v \cos v\Pi))}{dt} - vv_\pi \cos(vv_\pi)\ , \quad . \ . \ . \quad (293)$$

проекц скорост см. § ? ф 14.

гдѣ v_π означаетъ величину и направленіе скорости точки, находящейся на концѣ длины, равной единицѣ и проведенной изъ начала координатъ параллельно направленію П.

§ 70. Проэкціи ускоренія на координатныя оси полярныхъ координатъ.

Формулу (293) примѣнимъ къ составленію выраженій проэкцій ускоренія на оси α и β полярныхъ координатъ, предполагая, что точка совершаетъ движеніе въ плоскости XY.

Сохранимъ обозначенія, принятыя на стр. 36, и будемъ оріентироваться по чертежу 19 листа 1 го.

По формулѣ (293) напишемъ двѣ слѣдующія формулы:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\alpha) = \frac{d(v \cos(v\alpha))}{dt} - vv_A \cos(vv_A), \quad . \ . \ . \ . \quad (294)$$

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\beta) = \frac{d(v \cos(v\beta))}{dt} - vv_B \cos(vv_B), \quad . \ . \ . \ . \quad (295)$$

Проэкціи скорости на оси α и β выражаются формулами (20 bis), скорость v_A точки A (черт. 19) направлена параллельно оси β и равна $\frac{d\theta}{dt}$, а скорость v_B точки B направлена противоположно оси α и равна скорости v_A; поэтому:

$$v \cos(v\alpha) = \rho',\ v \cos(v\beta) = \rho\theta',$$

$$vv_A \cos(vv_A) = v\theta' \cos(v\beta),\ vv_B \cos(vv_B) = -v\theta' \cos(v\alpha).$$

VIII-70.

Вслѣдстіе этого, выраженіе (295) можно представить такъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \frac{d(\rho\theta')}{dt} + \rho'\theta' = \frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{d(\rho\theta')}{dt} + \rho\theta'\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{1}{\rho}\,\frac{d(\rho^2\theta')}{dt}.$$

Получатся влѣдующія выраженія:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad \ldots\ldots \quad (296)$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \frac{1}{\rho}\,\frac{d\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (297)$$

По этимъ формуламъ мы опредѣлимъ величину и направленіе ускоренія въ примѣрахъ 4, 5 и 10-мъ первой главы.

стр. 11 Въ примѣрѣ 4-мъ;

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = -\frac{4\pi^2}{T^2}at; \quad \dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \frac{4\pi}{T}a;$$

т. е. проэкція ускоренія на ось β постоянна, проэкція же ускоренія на радіусъ векторъ направлена къ началу координатъ и возрастаетъ пропорціонально времени.

стр. 11 Въ примѣрѣ 5-мъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = \rho\left(n^2 - \frac{4\pi^2}{T^2}\right); \quad \dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \frac{4\pi}{T}n\rho.$$

Величина ускоренія:

$$\dot{v} = \rho\left(n^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

пропорціональна квадрату величины скорости (сравн. стр. 37).

Изъ выраженій проекцій скорости на оси полярныхъ координатъ слѣдуетъ:

$$\operatorname{tg}(v\alpha) = \frac{2\pi}{nT},$$

поэтому:

$$\dot{v} = \frac{\rho n^2}{\cos^2(v\alpha)}$$

$$\cos(\dot{v}\alpha) = \cos^2(v\alpha)\,\{1 - \operatorname{tg}^2(v\alpha)\} = \cos 2(v\alpha),$$

$$\sin(\dot{v}\alpha) = \sin 2(v\alpha),$$

VIII - 70.

то есть ускореніе составляетъ съ осью α уголъ вдвое большій угла, составляемаго скоростью съ этою же осью.

Если въ какомъ либо движеніи произведеніе $\rho^2\theta'$ имѣетъ постоянную величину, то проэкція ускоренія на ось β равна нулю и ускореніе направлено по оси α или противоположно ей.

Это имѣетъ мѣсто въ движеніи точки по эллипсу, приведенномъ въ примѣрѣ 10, гдѣ $\rho^2\theta' = na^2\sqrt{1-e^2}$ (33). p. 41.

Такъ какъ ускореніе направлено въ вогнутую сторону кривой, то проэкція его на ось α имѣетъ отрицательную величину, а потому:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = -\dot{v} = \rho'' - \rho(\theta')^2,$$

или

$$\dot{v} = \frac{4c^2}{\rho^3} - \rho'',$$

гдѣ

$$2c = \rho^2\theta'.$$

Взявъ вторую производную по времени отъ равенства (28) стр. 47, мы найдемъ:

$$\rho'' = \frac{e\cos\theta}{p}\frac{4c^2}{\rho^2},$$

поэтому:

$$\dot{v} = \frac{4c^2}{p}\frac{1}{\rho^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (298)$$

то есть *ускореніе обратно пропорціонально квадрату разстоянія точки отъ начала координатъ.*

Такъ какъ:

$$2c = na^2\sqrt{1-e^2},\ p = a(1-e^2),\ nT = 2\pi,$$

то послѣднее равенство можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\dot{v} = \frac{4\pi^2a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (299)$$

Предлагаемъ читателю опредѣлить величину и направленіе ускоренія въ движеніяхъ, данныхъ въ задачахъ №№ 8 и 9; окажется:

въ задачѣ № 8, что ускореніе направлено по оси α отъ полюса и прямо пропорціонально радіусу вектору движущейся точки, а именно ускореніе равно: $\frac{c^2\rho}{4}$;

VIII-70-71.

въ задачѣ № 9, ускореніе направлено по оси α къ полюсу и обратно пропорціонально кубу радіуса вектора; а именно:

$$\dot{v} = \frac{a^2 b^4 \sin^2\alpha}{\rho^3}.$$

§ 71. Проэкціи ускоренія на координатныя оси сферическихъ координатъ.

Представимъ себѣ неизмѣняемую систему, съ которою неизмѣнно связаны прямоугольныя оси: ось $O\Xi$, совпадающая съ радіусомъ векторомъ OM движущейся точки M, ось $O\Upsilon$, параллельная координатной оси β, проходящей черезъ точку M, и ось $O\mathbf{Z}$, параллельная оси γ. На этихъ осяхъ возьмемъ три точки: точку A — на оси Ξ, точку B — на оси Υ, точку C — на оси $\mathbf{Z}$ всѣ три въ разстояніи равномъ единицѣ длины отъ точки O.

Проэкціи ускоренія точки M на оси α, β, γ выражаются формулами:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = \frac{d(v\cos(v\alpha))}{dt} - vv_A\cos(vv_A), \quad . \; . \; . \quad (300)$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \frac{d(v\cos(v\beta))}{dt} - vv_B\cos(vv_B), \quad . \; . \; . \quad (301)$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\gamma) = \frac{d(v\cos(v\gamma))}{dt} = vv_C\cos(vv_C), \quad . \; . \; . \quad (302)$$

Въ этихъ формулахъ проэкціи скорости точки M на координатныя оси α, β, γ или на параллельныя имъ оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, выражаются формулами (19) стр. 32:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v\alpha) &= v\cos(v\Xi) = \frac{dr}{dt}, \\ v\cos(v\beta) &= v\cos(v\Upsilon) = r\frac{d\varphi}{dt}, \\ v\cos(v\gamma) &= v\cos(v\mathbf{Z}) = r\sin\frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Воображаемая неизмѣняемая система вращается вокругъ точки O вмѣстѣ съ радіусомъ векторомъ OM и вмѣстѣ съ плоскостью POM (черт. 18), такъ что угловая скорость Ω этой среды есть составная изъ угловой скорости ψ' вокругъ оси OP и изъ угловой скорости φ' вокругъ оси $O\mathbf{Z}$; поэтому проэкціи угловой скорости Ω на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равны слѣдующимъ величинамъ:

$$p=\psi'\cos\varphi,\ \ q=-\psi'\sin\varphi,\ \ \Omega\cos(\Omega\mathbf{Z})=\varphi'\ \ ^{*}).$$

Относительныя координаты точекъ, A, B, C — слѣдующія:

$$\text{точки } A: \xi=1,\ \eta=0,\ \zeta=0,$$
$$\text{точки } B: \xi=0,\ \eta=1,\ \zeta=0,$$
$$\text{точки } C: \xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=1,$$

поэтому проэкціи скоростей этихъ точекъ на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, по формуламъ (114) параграфа 28, выражаются такъ:

$$v_A\cos(v_A\Xi)=0,\ v_B\cos(v_B\Xi)=-\varphi',\ v_C\cos(v_C\Xi)=-\psi'\sin\varphi,$$
$$v_A\cos(v_A\Upsilon)=\varphi',\ v_B\cos(v_B\Upsilon)=0,\ v_C\cos(v_C\Upsilon)=-\psi'\cos\varphi,$$
$$v_A\cos(v_A\mathbf{Z})=\psi'\sin\varphi, v_B\cos(v_B\mathbf{Z})=\psi'\cos\varphi, v_C\cos(v_C\mathbf{Z})=0.$$

Далѣе, мы составимъ произведенія, заключающіяся въ формулахъ (300) — (302):

$$vv_A\cos(vv_A)=r(\varphi')^2+r(\psi')^2\sin^2\varphi,$$
$$vv_B\cos(vv_B)=-r'\varphi'+r\sin\varphi\cos\varphi(\psi')^2,$$
$$vv_C\cos(vv_C)=-r'\psi'\sin\varphi-r\varphi'\psi'\cos\varphi.$$

Вслѣдствіе всего этого формулы (300) — (302) дадутъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}\dot v\cos(\dot v\alpha)&=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-r\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,\\ \dot v\cos(\dot v\beta)&=\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}-r\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,\\ \dot v\cos(\dot v\gamma)&=\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{d\left(r^2\sin^2\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt}.\end{aligned}\right\}\ \ldots (303)$$

---

*) Въ главѣ II мы означали проэкцію угловой скорости Ω на ось $\mathbf{Z}$ буквою r; здѣсь же мы не воспользуемся этимъ обозначеніемъ, такъ какъ r уже употреблена для обозначенія радіуса вектора движущейся точки M.

VIII - 71.72.

Примѣнимъ эти формулы къ опредѣленію величины и направленія ускоренія въ движеніи точки по локсодроміи (примѣръ 6-й).

Здѣсь:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = -\frac{Ra^2}{\cos^2\alpha} = -\frac{v^2}{R},$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = -Ra^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\varphi = -(a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\varphi)\,v\cos(v\gamma),$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\gamma) = \quad Ra^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\varphi = \quad (a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\varphi)\,v\cos(v\beta).$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$v\dot{v}\cos(\dot{v}v) = 0;\quad \dot{v} = va\sqrt{1+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\sin^2\varphi}},$$

то есть ускореніе перпендикулярно къ скорости и уменьшается по мѣрѣ приближенія движущейся точки къ экватору.

§ 72. Ускоренія втораго и высшихъ порядковъ.

Пусть x, y, z суть координаты движущейся точки въ моментъ t, а x_1, y_1, z_1 — координаты ея въ моментъ $t+\vartheta$; такъ какъ координаты движущейся точки суть непрерывныя функціи времени, то разности (x_1-x), (y_1-y), (z_1-z) могутъ быть выражены по извѣстной Тайлоровой формулѣ слѣдующимъ образомъ:

$$x_1 - x = \frac{dx}{dt}\vartheta + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \frac{d^4x}{dt^4}\frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} + \ldots \quad (304)$$

$$y_1 - y = \frac{dy}{dt}\vartheta + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dt^4}\frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} + \ldots \quad (305)$$

$$z_1 - z = \frac{dz}{dt}\vartheta + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \frac{d^4z}{dt^4}\frac{\vartheta^4}{1.2.2.4} + \ldots \quad (306)$$

Слѣдовательно, для того, чтобы перейти отъ координатъ x, y, z къ координатамъ x_1, y_1, z_1, надо знать не только проэкціи скорости и ускоренія въ моментъ t, но еще и величины вторыхъ, третьихъ и высшихъ производныхъ отъ координатъ по времени для того же момента.

Эти производныя выражаютъ проэкціи на оси координатъ X, $У$, Z величинъ, названныхъ Резалемъ: suraccélérations, а Сомовымъ — *ускореніями высшихъ порядковъ*; здѣсь мы дадимъ опредѣленія ускореній высшихъ порядковъ, составимъ выраженія проэкцій ихъ на неподвижныя оси координадъ и выраженія проэкцій ускоренія втораго порядка на касательную къ траэкторіи, на главную и на вторую нормаль.

VIII-72.

Мы видѣли, что ускореніе $\dot{v}$ (ускореніе перваго порядка) можно опредѣлить какъ дѣленную на единицу времени скорость годографа.

Если изъ начала координатъ провести длину, равную и параллельную длинѣ, изображающей ускореніе перваго порядка, то, при измѣненіи ускоренія съ теченіемъ времени, конецъ проведенной длины опишетъ кривую линію, которую можно назвать *годроографомъ ускоренія перваго порядка.*

Проэкціи на оси координатъ X, $У$, Z радіуса вектора этого годографа равны: $в^2x''$, $в^2y''$, $в^2z''$.

Ускореніемъ втораго порядка называется дѣленная на $в^2$ (квадратъ единицы времени) скорость точки, описывающей годографъ ускоренія перваго порядка; величину и направленіе этого новаго ускоренія мы будемъ обозначать знакомъ $\ddot{v}$.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что проэкціи на оси координатъ ускоренія втораго порядка выражаются третьими производными координатъ точки по времени:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{v}\cos(\ddot{v}X) &= \frac{d^3x}{dt^3}\\ \ddot{v}\cos(\ddot{v}У) &= \frac{d^3y}{dt^3}\\ \ddot{v}\cos(\ddot{v}Z) &= \frac{d^3z}{dt^3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(307)$$

и что ускореніе это имѣетъ измѣренія длины, дѣленной на кубъ времени.

Далѣе, *ускроеніемъ третьяго порядка* называется дѣленная на единицу времени въ кубѣ скорость годографа ускоренія втораго порядка; поэтому проэкціи на неподвижныя оси координатъ этого ускоренія равняются четвертымъ производнымъ координатъ по времени:

$$\left.\begin{aligned}\dddot{v}\cos(\dddot{v}X) &= \frac{d^4x}{dt^4}\\ \dddot{v}\cos(\dddot{v}У) &= \frac{d^4y}{dt^4}\\ \dddot{v}\cos(\dddot{v}Z) &= \frac{d^4z}{dt^4}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(308)$$

и оно имѣетъ измѣренія длины, дѣленной на четвертую степень времени.

VIII-72.

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы составимъ себѣ понятіе объ ускореніяхъ пятаго и высшихъ порядковъ и найдемъ, что проэкціи на неподвижныя оси координатъ ускоренія n-аго порядка выражаются производными $(n+1)$-наго порядка отъ координатъ по времени и что ускореніе этого порядка имѣетъ измѣренія длины, дѣленной на $(n+1)$-ную степень времени.

Обратимся теперь снова къ равенствамъ (304—306); первыя части ихъ представляютъ проэкціи на оси координатъ хорды MM_1, соединяющей положеніе M движущейся точки въ моментъ t съ положеніемъ ея M_1 въ моментъ $(t+\vartheta)$; каждый изъ членовъ вторыхъ частей представляетъ проэкцію на одну изъ осей координатъ нѣкоторой длины, а именно: первые члены суть проэкціи длины, равной произведенію $v\vartheta$, вторые члены суть проэкціи длины, равной произведенію $\dot{v}\frac{\vartheta^2}{2}$, и т. д.

Такимъ образомъ оказывается, что равенства (304 — 306) выражаютъ, что хорда M есть геометрическая сумма безчисленнаго множества длинъ: MA, AA_1, $A_1A_2, \ldots\ldots$ (черт. 106), равныхъ:

$$MA = v\vartheta,\ AA_1 = \dot{v}\frac{\vartheta^2}{1.2},\ A_1A_2 = \ddot{v}\frac{\vartheta^3}{1.2.3},\ A_2A_3 = \dddot{v}\frac{\vartheta^4}{1.2.3.4},\ \ldots.$$

и направленныхъ: первая—вдоль по скорости, вторая — параллельно ускоренію перваго порядка, третья — параллельно ускоренію втораго порядка и т. д.; какъ скорость, такъ и ускоренія относятся къ моменту t.

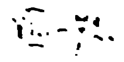
Чтобы составить выраженія проэкцій ускоренія втораго порядка на касательную и главную нормаль, мы предположимъ, какъ въ § 66 и 67, что x, y, z выражены функціями отъ s и при этомъ предположеніи возьмемъ отъ нихъ третьи производныя по времени.

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}X) = \frac{d^3x}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dx}{ds}\frac{d^3s}{dt^3} \quad \ldots (309)$$

. . . .

Входящія въ эти выраженія третьи производныя отъ координатъ по дугѣ s зависятъ не только отъ кривизны, но также отъ измѣненія положенія плоскости кривизны вдоль по кривой.

Величину, характеризующую измѣненіе положенія плоскости кривизны вдоль по кривой, прежде называли второю кривизною ея; названіе это, по его неправильности, замѣнено на иностранныхъ языкахъ другимъ, которое



можетъ быть переведено на русскій языкъ словомъ: завитіе «Cambrure. Tortuosity. Windung». *)

Среднее завитіе кривой, на протяженіи дуги ея отъ точки M до точки M_1, есть отношеніе угла, заключающагося между плоскостями кривизны въ точкахъ M и M_1, къ длинѣ этой дуги.

При приближеніи точки M_1 къ точкѣ M до совпаденія съ нею, уголъ между плоскостями кривизны приближается къ нулю, но величина средняго завитія приближается къ нѣкоторой предѣльной конечной величинѣ, выражающей *завитіе кривой въ точкѣ M.*

Величина завитія въ какой либо точкѣ кривой можетъ быть выражена, слѣдовательно, въ видѣ отношенія безконечно-малаго угла $d\varphi$, заключающагося между плоскостями кривизны въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ M и M_1 кривой, къ длинѣ ds безконечно-малой дуги, заключающейся между этими точками:

$$\text{Завитіе} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Изъ этого опредѣленія видно, что завитіе, подобно кривизнѣ, имѣетъ измѣренія единицы, дѣленной на нѣкоторую длину; эта длина называется обыкновенно величиною радіуса второй кривизны и обозначается буквою r; но такъ какъ мы употребляемъ эту букву для обозначенія другихъ величинъ, то согласимся обозначать эту длину буквою l.

И такъ:

$$\text{Завитіе} = \frac{1}{l} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (310)$$

гдѣ l есть такъ называемый радіусъ второй кривизны.

Уголъ $d\varphi$ можетъ быть также опредѣленъ, какъ уголъ между направленіями линій, проведенныхъ черезъ безконечно-близкія точки M и M_1 перпендикулярно къ плоскостямъ кривизны въ этихъ точкахъ; каждая такая линія называется *второю главною нормалью или бинормалью.*

Касательная къ кривой, главная нормаль и бинормаль, проведенныя въ которой либо точкѣ кривой, взаимно перпендикулярны.

Для того, чтобы составить общее аналитическое выраженіе величины завитія въ производныхъ отъ координатъ по s и, обратно, выразить третьи производныя въ завитіи и кривизнѣ, мы употребимъ нижеслѣдующій пріемъ.

---

*) По этой причинѣ кривую двоякой кривизны слѣдуетъ называть витою кривою.

VIII-72.

B. Представимъ себѣ, что вдоль по кривой движется нѣкоторая точка со скоростью равною единицѣ и что одновременно съ этимъ нѣкоторая неизмѣняемая среда совершаетъ вращательное движеніе вокругъ начала координатъ такимъ образомъ, что нѣкоторая неизмѣнно связанная съ нею ось $O\Upsilon$ сохраняетъ постоянную параллельность направленію радіуса кривизны кривой въ той точкѣ ея, въ которой находится движущаяся точка, и что, кромѣ того, нѣкоторая другая ось $O\Xi$ неизмѣняемой среды сохраняетъ постоянную параллельность скорости точки, движущейся по кривой, тогда само собою будетъ слѣдовать, что ось $O\mathbf{Z}$ будетъ постоянно параллельна бинормали.

Если по оси $O\mathbf{Z}$ отложить отъ начала координатъ длину Ob равную единицѣ, то безконечно-малая дуга, описанная точкою b, будетъ равна $\partial . d\varphi$; если же мы означимъ черезъ x_b, y_b, z_b координаты этой точки, то завитіе выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{l} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\partial}\sqrt{\left(\frac{dx_b}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_b}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_b}{ds}\right)^2} \quad . \; . \; . \quad (311)$$

Координаты x_b, y_b, z_b, равныя косинусамъ угловъ, составляемыхъ осью $\mathbf{Z}$ съ осями X, Y, Z, опредѣлятся по формуламъ (60, g, h, i стр. 60), если въ нихъ подставить:

$$\lambda_x = \frac{dx}{ds},\ \lambda_y = \frac{dy}{ds},\ \lambda_z = \frac{dz}{ds},$$

$$\mu_x = \rho\,\frac{d^2x}{ds^2},\ \mu_y = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2},\ \mu_z = \rho\,\frac{d^2z}{ds^2};$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \nu_x = x_b &= \rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) \\ \nu_y = y_b &= \rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) \\ \nu_z = z_b &= \rho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{a^2x}{ds^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (312)$$

На осяхъ Ξ и Υ возьмемъ точки k и n, отстоящія отъ O на единицу длины. Проэкціи на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ вращательныхъ скоростей $\mathfrak{w}_k$, $\mathfrak{w}_n$, $\mathfrak{w}_b$ точекъ k, n, b выразятся, по формуламъ (114) стр. 103, такъ:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{w}_k \cos(\mathfrak{w}_k\Xi) = 0, && \mathfrak{w}_k \cos(\mathfrak{w}_k\Upsilon) = r, && \mathfrak{w}_k \cos(\mathfrak{w}_k\mathbf{Z}) = -q \\ &\mathfrak{w}_n \cos(\mathfrak{r}_n\Xi) = -r, && \mathfrak{w}_n \cos(\mathfrak{w}_n\Upsilon) = 0, && \mathfrak{w}_n \cos(\mathfrak{w}_n\mathbf{Z}) = p \\ &\mathfrak{w}_b \cos(\mathfrak{w}_b\Xi) = q, && \mathfrak{w}_b \cos(\mathfrak{w}_b\Upsilon) = -p, && \mathfrak{w}_b \cos(\mathfrak{w}_b\mathbf{Z}) = 0. \end{aligned}$$

VIII - 72.

Но мы знаемъ, что направленіе радіуса кривизны параллельно касательной къ кривой, описываемой точкою k, поэтому $q = 0$ и r есть величина положительная.

Слѣдовательно, проэкція скорости $\mathfrak{w}_b$ на ось Ξ тоже равна нулю, а проэкція $\mathfrak{w}_n$ на эту ось имѣетъ величину отрицательную.

Величина же p можетъ быть положительною или отрицательною.

Во всякомъ случаѣ касательная къ кривой линіи, описываемой точкою b, параллельна главной нормали; но скорость этой точки можетъ быть или параллельна отрицательной оси Υ, если $p > 0$ (черт. 107), или параллельна положительной оси Υ, если $p < 0$ (черт. 108); въ случаяхъ перваго рода скорость точки n имѣетъ положительную проэкцію на ось Z, въ случаяхъ втораго рода—отрицательную.

Такимъ образомъ завитіе состоитъ во вращеніи плоскости кривизны вокругъ касательной линіи; направленіе вращенія опредѣляется знакомъ величины p.

Изъ того, что касательная къ кривой, описываемой точкою b, параллельна главной нормали, слѣдуетъ:

$$\frac{dx_b}{ds}\, l = \mp \frac{d^2x}{ds^2}\,\rho,\quad \frac{dy_b}{ds}\, l = \mp \frac{d^2y}{ds^2}\,\rho,\quad \frac{dz_b}{ds}\, l = \mp \frac{d^2z}{ds^2}\,\rho, \quad . \; (313)$$

гдѣ верхніе знаки должны быть взяты при p большемъ нуля.

Такъ какъ оси Ξ, Υ и Z взаимно перпендикулярны, то:

$$\lambda^2_x + \mu^2_x + x^2_b = 1,$$

откуда, взявъ производную по s, получимъ:

$$\lambda_x \frac{d\lambda_x}{ds} + \mu_x \frac{d\mu_x}{ds} + x_b \frac{dx_b}{ds} = 0.$$

Рѣшимъ это равенство относительно $\frac{d\mu_x}{ds}$:

$$\frac{d\mu_x}{ds} = -\frac{\lambda_x}{\mu_x}\frac{d\lambda_x}{ds} - \frac{x_b}{\mu_x}\frac{dx_b}{ds}$$

и подставимъ вмѣсто λ_x, μ_x и производной отъ x_b по s ихъ вышеприведенныя значенія, получимъ равенство:

$$\frac{d\left(\rho\,\frac{d^2x}{ds^2}\right)}{ds} = -\frac{1}{\rho}\frac{dx}{ds} \pm \frac{\cos(bX)}{l}; \quad . \; . \; . \; . \; (314)$$

VIII-72.

подобнымъ же образомъ составимъ два другія равенства подобнаго же вида, заключающія y и z вмѣсто x.

Изъ этихъ равенствъ получимъ затѣмъ слѣдующія выраженія для третьихъ производныхъ:

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \pm\frac{\cos(bX)}{l\rho} + \cos(\rho X)\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} - \frac{1}{\rho^2}\frac{dx}{ds}\ \ldots\ (315)$$

. . . .

При помощи этихъ выраженій равенства (309) представятся слѣдующимъ образомъ:

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}X) = \pm\frac{v^3}{l\rho}\cos(bX) + \frac{1}{v}\frac{d\left(\frac{v^3}{\rho}\right)}{dt}\cos(\rho X) +$$

$$+\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}\right)\frac{dx}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ (316)$$

. . . .

Изъ этихъ выраженій видно, что проэкціи ускоренія втораго порядка на касательную, на направленіе радіуса кривизны и на бинормаль выражаются такъ:

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}v) = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2},\ \ldots\ldots\ (317)$$

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}\rho) = \frac{1}{v}\frac{d\left(\frac{v^3}{\rho}\right)}{dt},\ \ldots\ldots\ (318)$$

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}b) = \pm\frac{v^3}{l\rho};\ \ldots\ldots\ (319)$$

въ послѣднемъ вараженіи верхній знакъ долженъ быть взятъ тогда, когда p имѣетъ величину положительную.

Для опредѣленія знака величины p мы возьмемъ выраженіе:

$$p = \mathfrak{w}_n\cos(\mathfrak{w}_n\mathbf{Z}) = \frac{d\mu_x}{ds}x_b + \frac{d\mu_y}{ds}y_b + \frac{d\mu_z}{ds}z_b,$$

которое представится, по сокращеніи, подъ слѣдующимъ видомъ:

$$p = \rho^2\left\{\frac{d^3x}{ds^3}\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \frac{d^3y}{ds^3}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{d^3z}{ds^3}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\}\ \ldots\ldots\ (320)$$

VIII-72.

Для примѣра опредѣлимъ ускореніе втораго порядка въ движеніи точки съ постоянною скоростью по правой или лѣвой винтовой линіи на круговомъ цилиндрѣ.

Движеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

$$x = R\cos\left(\frac{at\cos\alpha}{R}\right),\ y = \mp R\sin\left(\frac{at\cos\alpha}{R}\right),\ z = at\sin\alpha,$$

гдѣ a есть скорость движущейся точки, R—радіусъ основанія цилиндра, α—уголъ наклоненія винтовой линіи къ основанію цилиндра; верхній знакъ относится къ право-винтовой линіи.

По извѣстнымъ формуламъ найдемъ:

$$ds = adt,\ s = at;$$

затѣмъ:

$$x = R\cos\left(\frac{s\cos\alpha}{R}\right),\ y = \mp R\sin\left(\frac{s\cos\alpha}{R}\right),\ z = s\sin\alpha.$$

По формуламъ (286) и (287) мы найдемъ, что радіусъ кривизны имѣетъ постоянную величину:

$$\rho = \frac{R}{\cos^2\alpha}$$

и направленіе прямо противоположное координатной оси x (черт. 7).

По формуламъ (311) и (312) мы найдемъ, что завитіе винтовой линіи также постоянно на всемъ протяженіи кривой и равно:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R},$$

такъ что

$$l = \frac{R}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

По формулѣ (320) мы составимъ выраженіе для p:

$$p = \mp\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R}.$$

Слѣдовательно, въ право-винтовой линіи p имѣетъ отрицательную, въ лѣво-винтовой—положительную величину; поэтому завитіе, при которомъ $p > 0$, можно называть лѣво-винтовымъ, обратное—право-винтовымъ.

Проэкціи ускоренія втораго порядка на касательную и бинормаль въ разсматриваемомъ движеніи равны:

$$\ddot{v}\cos(\ddot{v}v) = -\frac{a^3\cos^4\alpha}{R^2},\ \ddot{v}\cos(\ddot{v}b) = \mp\frac{a^3\cos^3\alpha\sin\alpha}{R^2},$$

проэкція на радіусъ кривизны равна нулю.

VIII-72; IX-73.

Бинормаль направлена внизъ (по отрицательной оси Z) въ правомъ и вверхъ въ лѣвомъ винтѣ, поэтому проэкція ускоренія на бинормаль составляетъ въ обоихъ случаяхъ съ осью Z острый уголъ.

ГЛАВА IX.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла.

§ 73. Проэкціи ускореній точекъ твердаго тѣла на неподвижные оси координатъ.

Чтобы получить выраженія проэкцій ускореній точекъ твердаго тѣла на неподвижныя оси координатъ, надо взять производныя по t отъ обѣихъ частей равенствъ (142) стр. 125:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''_ю + (z - z_ю)\,Q' - (y - y_ю)\,R' +$$

$$+ \frac{d\,(z - z_ю)}{dt}\,Q - \frac{d\,(y - y_ю)}{dt}\,R.$$

. . . .

Входящія сюда производныя:

$$\frac{d\,(x - x_ю)}{dt},\ \frac{d\,(y - y_ю)}{dt},\ \frac{d\,(z - z_ю)}{dt}$$

можемъ замѣнить снова ихъ выраженіями изъ равенствъ (142):

$$\frac{d(z - z_ю)}{dt}\,Q - \frac{d\,(y - y_ю)}{dt}\,R = \left\{\begin{matrix}(y - y_ю)\,PQ - (x - x_ю)\,Q^2 + \\ + (z - z_ю)\,PR - (x - x_ю)\,R^2\end{matrix}\right\}.$$

Ко второй части этого равенства придадимъ и вычтемъ изъ нея произведеніе $(x - x_ю)\,P^2$; она получитъ тогда слѣдующій видъ:

$$\big((x - x_ю)\,P + (y - y_ю)\,Q + (z - z_ю)\,R\big)\,P - (x - x_ю)\,\Omega^2 =$$

$$= P\Omega r \cos(r\Omega) - (x - x_ю)\,\Omega^2.$$

IX - 73, 74.

Такимъ образомъ получатся слѣдующія выраженія:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \dot{w}\cos(\dot{w}X) = x''_ю + (z - z_ю)\,Q' - (y - y_ю)\,R' +$$
$$+ P\Omega r\cos(r\Omega) - (x - x_ю)\,\Omega^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (321, a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \dot{w}\cos(\dot{w}Y) = y''_ю + (x - x_ю)\,R' - (z - z_ю)\,P' +$$
$$+ Q\Omega r\cos(r\Omega) - (y - y_ю)\,\Omega^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (321, b)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \dot{w}\cos(\dot{w}Z) = z''_ю + (y - y_ю)\,P' - (x - x_ю)\,Q' +$$
$$+ R\Omega r\cos(r\Omega) - (z - z_ю)\,\Omega^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (321, c)$$

Разсматривая эти выраженія, мы замѣчаемъ, что вторыя части ихъ заключаютъ три группы членовъ:

A) Проэкціи ускоренія полюса, то есть величины $x''_ю$, $y''_ю$, $z''_ю$.

B) Члены, заключающіе величины P', Q', R'.

C) Члены, заключающіе P, Q, R. во второй степени или произведенія ихъ.

§ 74. Угловое ускореніе, его измѣренія. Вращательное ускореніе.

Величины:

$$P' = \frac{dP}{dt},\ \ Q' = \frac{dQ}{dt},\ \ R' = \frac{dR}{dt},$$

равно какъ и величину изъ нихъ составленную:

$$\dot{\Omega} = \sqrt{(P')^2 + (Q')^2 + (R')^2},$$ ф. 133.

мы встрѣчали уже въ § 30; здѣсь намъ придется повторить кое что сказанное въ этомъ параграфѣ.

Если изъ начала координатъ провести длину, изображающую угловую скорость, то, при движеніи тѣла, конецъ ея *A* опишетъ кривую линію, называемую неподвижнымъ *годографомъ угловой скорости*; радіусы векторы этого годографа такъ относятся къ единицѣ длины (*д*), какъ представляемыя ими угловыя скорости относятся къ единицѣ

IX-74.

угловой скорости $(1 : в)$, поэтому координаты точки A выразятся величинами:

$$вд \,.\, P,\; вд \,.\, Q.\; вд \,.\, R,$$

а проэкціи на оси координатъ скорости этой точки — величинами:

$$вд \,.\, P',\; вд \,.\, Q',\; вд \,.\, R'.$$

Величина скорости точки A будетъ равна $вд \,.\, \dot{\Omega}$.

Скорость точки A, дѣленная на $вд$, то есть величина $\dot{\Omega}$, называется *угловымъ ускореніемъ*, а величины P', Q', R',—проэкціями угловаго ускоренія на неподвижныя оси координатъ; направленіе скорости точки A называется направленіемъ угловаго ускоренія; поэтому мы пишемъ слѣдующія формулы:

$$P' = \dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}X),\; Q' = \dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}Y),\; R' = \dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}Z)\,. \quad (322)$$

Угловое ускореніе имѣетъ измѣренія отвлеченнаго числа дѣленнаго на квадратъ времени, такъ что:

$$\text{единица угловаго ускоренія} = \frac{1}{(\text{единица врем.})^2}.$$

Заключающіяся во вторыхъ частяхъ выраженій (321) разности:

$$(z - z_ю)\, Q' - (y - y_ю)\, R',\; (x - x_ю)\, R' - (z - z_ю)\, P',$$
$$(y - y_ю)\, P' - (x - x_ю)\, Q'$$

имѣютъ тотъ же самый видъ, что и вторыя части равенствъ (96), отличаясь отъ нихъ тѣмъ, что, вмѣсто проэкціи угловой скорости, заключаютъ проэкціи угловаго ускоренія; по сходству вида мы можемъ судить, что эти разности суть выраженія проэкцій на оси X, Y, Z нѣкотораго ускоренія (то есть величины, имѣющей измѣренія длины дѣленной на квадратъ времени), направленнаго перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ радіусъ векторъ $r = \overline{Ю\mathfrak{M}}$ точки и черезъ направленіе $Ю\dot{\Omega}$ (черт. 109) угловаго ускоренія. Ускореніе это, которое мы назовемъ *вращательнымъ ускореніемъ вокругъ полюса $Ю$*, имѣетъ величину равную произведенію угловаго ускоренія на длину разстоянія $\mathfrak{M}H$ точки $\mathfrak{M}$ отъ линіи

IX - 74.75.

$\dot{\Omega}Ю$ и направлено слѣва на право для наблюдателя, стоящаго ногами въ $Ю$ по направленію $Ю\dot{\Omega}$ и смотрящаго на точку $\dot{\mathfrak{M}}$; мы условимся обозначать это вращательное ускореніе такъ: $\dot{\mathfrak{w}}$.

$$\dot{\mathfrak{w}} = \dot{\Omega}\overline{\mathfrak{M}H} = \dot{\Omega}r \overset{\sin}{\cos}(\dot{\Omega}r) \quad \ldots\ldots \quad (323)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{w}}\cos(\dot{\mathfrak{w}}X) &= (z-z_ю)\,Q' - (y-y_ю)\,R' \\ \dot{\mathfrak{w}}\cos(\dot{\mathfrak{w}}У) &= (x-x_ю)\,R' - (z-z_ю)\,P' \\ \dot{\mathfrak{w}}\cos(\dot{\mathfrak{w}}Z) &= (y-y_ю)\,P' - (x-x_ю)\,Q' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (324)$$

§ 75. Центростремительное ускореніе.

Въ членахъ группы C въ выраженіяхъ (321) заключается произведеніе $r\cos(r\Omega)$, выражающее длину $\overline{ЮE}$ (черт. 41) проэкціи радіуса вектора $\overline{Ю\mathfrak{M}}$ на направленіе $Ю\Omega$ угловой скорости; кромѣ того, мы находимъ въ членахъ этой группы разности $(x - x_ю)$, $(y - y_ю)$, $(z - z_ю)$, выражающія проэкціи радіуса вектора $r(\overline{Ю\mathfrak{M}})$ на неподвижныя оси координатъ; слѣдовательно, члены этой группы можно написать такъ:

$$\Omega^2[\overline{ЮE}\cos(\Omega X) - r\cos(rX)],\quad \Omega^2[\overline{ЮE}\cos(\Omega У) - r\cos(rУ)],$$

$$\Omega^2[\overline{ЮE}\cos(\Omega Z) - r\cos(rZ)].$$

Величины, заключающіяся въ скобкахъ вида [ ], суть проэкціи на оси X, $У$, Z геометрической разности между длиною $\overline{ЮE}$, направленною по Ω, и между радіусомъ векторомъ $\overline{Ю\mathfrak{M}}$; геометрическая же разность (см. стр. 124) этихъ длинъ есть длина $\overline{\mathfrak{M}E}$ (черт. 41), поэтому разсматриваемые члены выражаютъ проэкціи на оси X, $У$, Z ускоренія равнаго:

$$\dot{\mathfrak{c}} = \Omega^2 . \overline{\mathfrak{M}E}$$

и направленнаго отъ $\mathfrak{M}$ къ E.

IX-75.76.77.

Это ускореніе называется *центростремительнымъ ускореніемъ по отношенію къ полюсу Ю*; мы будемъ его обозначать знакомъ: $\dot{c}$.

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}\cos(\dot{c}X) &= P\Omega r\cos(r\Omega) - \Omega^2(x - x_{ю}) \\ \dot{c}\cos(\dot{c}Y) &= Q\Omega r\cos(r\Omega) - \Omega^2(y - y_{ю}) \\ \dot{c}\cos(\dot{c}Z) &= R\Omega r\cos(r\Omega) - \Omega^2(z - z_{ю}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (325)$$

§ 76. Ускореніе всякой точки твердаго тѣла есть геометрическая сумма трехъ ускореній.

Формулы (321—323) выражаютъ, что ускореніе $\dot{w}$ всякой точки твердаго тѣла можетъ быть разсматриваемо, какъ геометрическая сумма трехъ ускореній:

A) ускоренія $\dot{w}_{ю}$ точки *Ю* (полюса),

B) вращательнаго ускоренія $\dot{\mathfrak{w}}$ вокругъ этого полюса,

C) центростремительнаго ускоренія $\dot{c}$ по отношенію къ этому полюсу.

Символическое выраженіе этой зависимости:

$$\overline{\dot{w}} = \overline{\dot{w}_{ю}} + \overline{\dot{\mathfrak{w}}} + \overline{\dot{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (326)$$

замѣняетъ собою формулы (321).

§ 77. Выраженія проэкцій ускореній точекъ твердаго тѣла на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ.

Такъ какъ ускоренія $\dot{w}$, $\dot{w}_{ю}$, $\dot{\mathfrak{w}}$ и $\dot{c}$ имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій равныхъ и параллельныхъ имъ можно составить замкнутый четыреугольникъ, то проэкція $\dot{w}$ на всякое направленіе, а слѣдовательно и на оси Ξ, Υ, **Z**, равняется суммѣ проэкцій остальныхъ трехъ ускореній на тоже направленіе.

Составимъ выраженія проэкцій ускореній $\dot{w}_{ю}$, $\dot{\mathfrak{w}}$, $\dot{c}$, на оси Ξ, Υ, **Z**.

А. Проэкція ускоренія полюса *Ю* на ось Ξ очевидно выражается формулою:

$$\dot{w}_{ю}\cos(\dot{w}_{ю}\Xi)=x''_{ю}\lambda_x+y''_{ю}\lambda_y+z''_{ю}\lambda_z \quad . \; . \; . \; . \; (327)$$

и подобныя же формулы выражаютъ проэкціи его на двѣ другія оси.

B. Проэкціи вращательнаго ускоренія на оси Ξ, Υ, **Z** должны выражаться формулами сходными съ формулами (114), выражающими проэкціи вращательной скорости на тѣ же оси, такъ какъ вращательное ускореніе отличается отъ вращательной скорости тѣмъ, что угловая скорость замѣнена угловымъ ускореніемъ.

Слѣдовательно, намъ предстоитъ прежде составить выраженія проэкцій угловаго ускоренія на оси Ξ, Υ, **Z**.

Проэкція угловаго ускоренія на ось Ξ равна.

$$\dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}\Xi)=P'\lambda_x+Q'\lambda_y+R'\lambda_z,$$

или:

$$\dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}\Xi)=\frac{d(P\lambda_x+Q\lambda_y+R\lambda_z)}{dt}-(P\lambda'_x+Q\lambda'_y+R\lambda'_z).$$

Если мы подставимъ вмѣсто λ'_x, λ'_y, λ'_z ихъ выраженія (104, *a*, *b*, *c*) на стр. 93, то найдемъ, что второй тричленъ второй части предыдущаго равенства равенъ нулю.

По формуламъ же (116), тричленъ, отъ котораго берется производная по *t* въ предъидущемъ выраженіи, равенъ *p*, такимъ образомъ мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}\Xi)&=p'=P'\lambda_x+Q'\lambda_y+R'\lambda_z\\ \dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}\Upsilon)&=q'=P'\mu_x+Q'\mu_y+R'\mu_z\\ \dot{\Omega}\cos(\dot{\Omega}\mathbf{Z})&=r'=P'\nu_x+Q'\nu_y+R'\nu_z\end{aligned}\right\}{}^{*)}\;, \; . \; . \; . \; (328)$$

то есть проэкціи угловаго ускоренія на оси Ξ, Υ, **Z** суть величины:

$$\frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt}.$$

---

*) Формулы эти слѣдуютъ также изъ формулъ (132) стр. 116

IX-77.

На основаніи сказаннаго, проэкціи ускоренія $\dot{\mathfrak{w}}$ на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathfrak{w}}\cos(\dot{\mathfrak{w}}\Xi) &= \zeta q' - \eta r' \\ \dot{\mathfrak{w}}\cos(\dot{\mathfrak{w}}\Upsilon) &= \xi r' - \zeta p' \\ \dot{\mathfrak{w}}\cos(\dot{\mathfrak{w}}\mathbf{Z}) &= \eta p' - \xi q'\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (329)$$

C. Проэкція центростремительнаго ускоренія на ось Ξ равняется Ω^2, помноженной на разность проэкцій на туже ось длинъ $\overline{ЮE}$ и $\overline{Ю\mathfrak{M}}$; то есть:

$$\dot{c}\cos(\dot{c}\Xi) = \Omega^2\, ЮE \cos(\Omega\Xi) - \Omega^2\xi;$$

но:

$$\Omega\,.\,ЮE = p\xi + q\eta + r\zeta,$$

поэтому:

$$\dot{c}\cos(\dot{c}\Xi) = p(p\xi + q\eta + r\zeta) - \xi\Omega^2; \quad \ldots \quad (330)$$

гдѣ

$$\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

На основаніи сказаннаго въ началѣ этого параграфа, мы составляемъ слѣдующія выраженія проэкцій ускоренія какой либо точки твердаго тѣла на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ:

$$\dot{w}\cos(\dot{w}\Xi) = x''_{ю}\lambda_x + y''_{ю}\lambda_y + z''_{ю}\lambda_z + \zeta q' - \eta r' +$$
$$+ p(p\xi + q\eta + r\zeta) - \xi\Omega^2 \quad \ldots\ldots \quad (331,\ a)$$

$$\dot{w}\cos(\dot{w}\Upsilon) = x''_{ю}\mu_x + y''_{ю}\mu_y + z''_{ю}\mu_z + \xi r' - \zeta p' +$$
$$+ q(p\xi + q\eta + r\zeta) - \eta\Omega^2 \quad \ldots\ldots \quad (331,\ b)$$

$$\dot{w}\cos(\dot{w}\mathbf{Z}) = x''_{ю}\nu_x + y''_{ю}\nu_y + z''_{ю}\nu_z + \eta p' - \xi q' +$$
$$+ r(p\xi + q\eta + r\zeta) - \zeta\Omega^2 \quad \ldots\ldots \quad (331,\ c)$$

(327)

Х-78.

ГЛАВА X.

Ускореніе относительнаго движенія точки по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ.

§ 78. Ускореніе относительнаго движенія. Проэкціи его на оси координатъ, неизмѣнно связанныя со средою.

Возвращаемся снова къ относительному движенію нѣкоторой точки M по отношенію къ нѣкоторой неизмѣняемой движущейся средѣ.

Отъ скорости относительнаго движенія переходимъ къ ускоренію относительнаго движенія такимъ же образомъ, какъ это дѣлалось для абсолютнаго движенія.

Все, что было сказано въ VIII-й главѣ объ ускореніи абсолютнаго движенія, о проэкціяхъ его на оси координатъ X, $У$, Z, на касательную и на главную нормаль траэкторіи абсолютнаго движенія, — примѣняется слово въ слово къ ускоренію относительнаго движенія, къ проэкціямъ его на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, на касательную и на главную нормаль траэкторіи относительнаго движенія. Поэтому, говоря объ ускореніи относительнаго движенія, мы будемъ здѣсь выражаться короче, такъ какъ намъ пришлось бы почти повторять сказанное въ главѣ VIII.

Для краткости, мы будемъ говорить: «относительное ускореніе» вмѣсто: «ускореніе относительнаго движенія».

Относительное ускореніе есть величина присущая всякому такому относительному движенію точки M по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ, въ которомъ относительная скорость точки M измѣняетъ постепенно свою величину или направленіе въ неизмѣняемой средѣ, или то и другое вмѣстѣ.

Величина относительнаго ускоренія равняется дѣленной на единицу времени величинѣ относительной скорости точки $\mathfrak{U}$, *чертящей годографъ относительнаго движенія* (§ 45).

Направленіе, которое имѣетъ относительная скорость этой точки $\mathfrak{U}$, *принимается за направленіе относительнаго ускоренія.*

X-73.

Относительное ускореніе имѣетъ тѣ же самыя измѣренія (размѣры), какіе имѣетъ ускореніе абсолютнаго движенія и измѣряется тѣми же самыми единицами.

Относительное ускореніе, подобно абсолютному, изображается длиною, отложенною отъ положенія движущейся точки по направленію относительнаго ускоренія и заключающею въ себѣ столько единицъ длины и частей ея сколько въ изображаемомъ ускореніи заключается единицъ ускоренія и частей ея.

Величину и направленіе относительнаго ускоренія какой либо движущейся точки M мы будемъ обозначать тою же самою буквою, какою обозначали величину и направленіе относительной скорости ея, но съ точкою надъ буквою; если относительную скорость точки M мы обозначали буквою u, то относительное ускореніе ея обозначимъ слѣдующимъ знакомъ:

$$\dot{u}.$$

Проэкціи ускоренія относительнаго движенія на оси координатъ Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равны дѣленнымъ на θ проэкціямъ на тѣ же оси относительной скорости точки $\mathfrak{U}$, описывающей относительный годографъ; а такъ какъ относительныя координаты этой точки суть:

$$\theta\xi' = \theta\frac{d\xi}{dt}, \quad \theta\eta' = \theta\frac{d\eta}{dt}, \quad \theta\zeta' = \theta\frac{d\zeta}{dt}, \quad \ldots \quad (332)$$

то проэкціи относительнаго ускоренія на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}\cos(\dot{u}\Xi) &= \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ \dot{u}\cos(\dot{u}\Upsilon) &= \frac{d^2\eta}{dt^2} \\ \dot{u}\cos(\dot{u}\mathbf{Z}) &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (333)$$

Величина относительнаго ускоренія:

$$\dot{u} = +\sqrt{(\xi'')^2 + (\eta'')^2 + (\zeta'')^2} \quad \ldots\ldots \quad (334)$$

X-78.79.

Проэкція относительнаго ускоренія на всякое направленіе П, неизмѣнно связанное съ движущейся средою, выражается формулою:

$$\dot{u}\cos(\dot{u}\Pi) = \frac{d^2(\rho\cos(\rho\Pi))}{dt^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (335)$$

гдѣ ρ означаютъ величину и направленіе радіуса вектора, проведеннаго изъ точки *Ю* къ движущейся точкѣ *М*.

Относительное ускореніе заключается въ плоскости кривизны относительной траэкторіи; проэкціи его на направленіе относительной скорости и на направленіе радіуса кривизны относительной траэкторіи выражаются такъ:

$$\dot{u}\cos(\dot{u}u) = \frac{du}{dt}, \; \dot{u}\cos(\dot{u}\rho) = \frac{u^2}{\rho}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; (336)$$

Здѣсь ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны относительной траэкторіи въ той точкѣ, въ которой находится движущаяся точка въ разсматриваемый моментъ.

Проэкціи относительнаго ускоренія на координатныя оси *сферическихъ или полярныхъ относительныхъ координатъ* (стр. 173) выражаются формулами, вполнѣ подобными тѣмъ, которыя выражаютъ проэкціи ускоренія абсолютнаго движенія на координатныя оси абсолютныхъ сферическихъ или полярныхъ координатъ. §§70 и 71

Проэкціи относительнаго ускоренія на неподвижныя оси координатъ X, $У$, Z выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}\cos(\dot{u}X) &= \xi''\lambda_x + \eta''\mu_x + \zeta''\nu_x \\ \dot{u}\cos(\dot{u}У) &= \xi''\lambda_y + \eta''\mu_y + \zeta''\nu_y \\ \dot{u}\cos(\dot{u}Z) &= \xi''\lambda_z + \eta''\mu_z + \zeta''\nu_z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (337)$$

§ 79. Зависимость между ускореніями абсолютнымъ и относительнымъ. Поворотное ускореніе.

Для опредѣленія соотношенія между ускореніемъ абсолютнаго движенія точки *М* и ускореніемъ относительнаго движенія ея по

X-79.

отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ, мы возьмемъ производныя по времени отъ равенствъ (199) § 48; получимъ:

$$x'' = \xi''\lambda_x + \eta''\mu_x + \zeta''\nu_x + 2(\xi'\lambda'_x + \eta'\mu'_x + \zeta'\nu'_x) +$$
$$+ x''_{ю} + \xi\lambda''_x + \eta\mu''_x + \zeta\nu''_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (338,\ a)$$

$$y'' = \xi''\lambda_y + \eta''\mu_y + \zeta''\nu_y + 2(\xi'\lambda'_y + \eta'\mu'_y + \zeta'\nu'_y) +$$
$$+ y''_{ю} + \xi\lambda''_y + \eta\mu''_y + \zeta\nu''_y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (338,\ b)$$

$$z'' = \xi''\lambda_z + \eta''\mu_z + \zeta''\nu_z + 2(\xi'\lambda'_z + \eta'\mu'_z + \zeta'\nu'_z) +$$
$$+ z''_{ю} + \xi\lambda''_z + \eta\mu''_z + \zeta\nu''_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (338,\ c)$$

I. Первыя части этихъ равенствъ выражаютъ проэкціи на неподвижныя оси X, $У$, Z ускоренія $\dot{v}$ абсолютнаго движенія точки M.

II. Вторыя части каждаго изъ этихъ равенствъ заключаютъ по десяти членовъ.

1. Суммы первыхъ трехъ членовъ выражаютъ (см. (337)) проэкціи на оси X, $У$, Z ускоренія $\dot{u}$ относительнаго движенія точки M.

2. За этими членами въ выраженіяхъ (338) стоятъ трехчлены, заключенные въ скобки и помноженные на два; эти трехчлены мы сравнимъ со вторыми частями равенствъ (93) стр. 83; такъ, трехчленъ:

$$\xi'\frac{d\lambda_x}{dt} + \eta'\frac{d\mu_x}{dt} + \zeta'\frac{d\nu_x}{dt}$$

сравнимъ съ трехчленомъ:

$$\mathfrak{w}\cos(\mathfrak{w}X) = \xi\frac{d\lambda_x}{dt} + \eta\frac{d\mu_x}{dt} + \zeta\frac{d\nu_x}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

и подобнымъ же образомъ сравнимъ прочіе соотвѣтственные трехчлены.

Трехчлены вида (93) выражаютъ, какъ намъ извѣстно, проэкціи на оси X, $У$, Z вращательной вокругъ полюса $Ю$ скорости той точки $\mathfrak{M}$ среды, относительныя координаты которой суть ξ, η, ζ.

Поэтому тричлены вида:

$$в.\xi'\frac{d\lambda_x}{dt}+в.\eta'\frac{d\mu_x}{dt}+в.\zeta'\frac{d\nu_x}{dt}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (339)$$

выражаютъ проэкціи на оси X, $У$, Z вращательной вокругъ $Ю$ скорости той точки неизмѣняемой среды, относительныя координаты которой суть: $в.\xi'$ $в.\eta'$. $в.\zeta'$, а это, какъ намъ извѣстно (332), суть относительныя координаты точки Ц, описывающей относительный годографъ.

Слѣдовательно, тричлены, заключающіеся въ скобкахъ во вторыхъ частяхъ равенствъ (338), равняются, дѣленнымъ на единицу времени ($в$), проэкціямъ на оси X, $У$, Z вращательной скорости (вокругъ полюса $Ю$) той точки неизмѣняемой среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ точка Ц, чертящая годографъ относительнаго движенія; очевидно, тричлены эти имѣютъ измѣренія ускореній.

Такимъ образомъ мы видимъ, что вышесказанные удвоенные тричлены представляютъ проэкціи на оси X, $У$, Z ускоренія, имѣющаго величину и направленіе удвоенной и дѣленной на $в$ вращательной скорости точки среды, совпадающей съ точкою Ц.

Въ механикѣ весьма часто приходится пользоваться формулами, въ которыхъ проэкціи вышесказаннаго ускоренія входятъ преимущественно съ отрицательными знаками; поэтому принято обозначать особымъ наименованіемъ не то ускореніе, объ которомъ мы сейчасъ говорили, но прямопротивоположное ему.

Послѣднее называется у французовъ «центробѣжнымъ сложнымъ ускореніемъ» (accélération centrifuge composée); этому не совсѣмъ удачному наименованію мы предпочтемъ другое, употребленное Сомовымъ въ его Раціональной Механикѣ, а именно наименованіе *поворотнаго ускоренія*.*)

И такъ, *поворотнымъ ускореніемъ мы будемъ называть ускореніе равное и прямопротивоположное удвоенной и дѣленной на единицу времени вращательной (вокругъ полюса Ю) скорости той точки неизмѣняемой среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ точка* Ц, *чертящая* [redacted] *годографъ.*

*)

Величину и направленіе поворотнаго ускоренія мы будемъ обозначать знакомъ:

по имени Коріолиса $\dot{k}$.

Мы имѣемъ, слѣдовательно, такія выраженія для проэкцій поворотнаго ускоренія на оси X, $У$, Z:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}\cos(\dot{k}X) &= -2(\xi'\lambda'_x + \eta'\mu'_x + \zeta'\nu'_x) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}У) &= -2(\xi'\lambda'_y + \eta'\mu'_y + \zeta'\nu'_y) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}Z) &= -2(\xi'\lambda'_z + \eta'\mu'_z + \zeta'\nu'_z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (340)$$

Тѣ самыя преобразованія, помощію которыхъ мы изъ формулъ (93) получили формулы (96), дадутъ намъ возможность выразить тричлены, заключающіеся во вторыхъ частяхъ равенствъ (340), разностями, заключающими угловыя скорости P, Q, и R и проэкціи радіуса вектора $\overline{ѴЮ}$ на оси X, $У$, Z; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}\cos(\dot{k}X) &= -2(Qu\cos(uZ) - Ru\cos(uУ)) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}У) &= -2(Ru\cos(uX) - Pu\cos(uZ)) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}Z) &= -2(Pu\cos(uУ) - Qu\cos(uX)) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (341)$$

гдѣ проэкціи скорости (u) на оси X, $У$, Z выражаются формулами (196).

Величина поворотнаго ускоренія равняется произведенію:

$$2\Omega u \sin(u\Omega) = \dot{k};$$

направленіе же его перпендикулярно къ плоскости, параллельной угловой скорости неизмѣняемой среды и относительной скорости (u) движущейся точки M; сторона, въ которую направлено поворотное ускореніе, опредѣляется по слѣдующему правилу: наблюдателю, стоящему ногами въ точкѣ $Ю$, головою по направленію угловой скорости и смотрящему на точку $Ѵ$, длина, параллель-

Геометрическое доказательство теоремы Кориолиса.

Черт. 1.

Въ послѣднемъ изданіи „Traité de Mécanique Générale" извѣстнаго французскаго академика Резаля (томъ первый стр. 35, изданія 1895 года) помѣщено геометрическое поясненіе сложенія ускореній въ относительномъ движеніи, при чемъ допущена довольно существенная погрѣшность. Такъ какъ сочиненіе Резаля общеизвѣстно, то полагаю не безынтереснымъ обратить вниманіе на это поясненіе и указать, въ чемъ заключается его неточность, тѣмъ болѣе, что приводимыя здѣсь соображенія могутъ служить довольно нагляднымъ, чисто геометрическимъ способомъ вывода извѣстной теоремы Кориолиса объ ускореніи относительнаго движенія.

Вотъ переводъ поясненія Резаля:

„Сложеніе ускореній. Пусть будетъ для момента t (черт. 1).

V_r^m • v — относительная скорость точки m по отношенію къ неизмѣняемой системѣ (S);

V_e^m • v_1 — скорость точки a системы (S), съ которой совпадаетъ m въ моментъ t (скорость эта называется переносною);

V_a V — абсолютная скорость:

$$V_a = V_r + V_e \qquad \overline{V} = \overline{v} + \overline{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Въ промежутокъ времени dt точка m описала траекторію

$$\overline{aa'} = V.dt, \ = V_a dt$$

а точка a — траекторію

$$\overline{ab} = v_1.dt. = V_e dt$$

Пусть будетъ:

V_r^m v' — относительная скорость точки m въ положеніи a',

$V_e^{a'}$ v_1' — переносная скорость точки a',

V_e w — скорость точки b тѣла (S); вообще говоря, не одинаковая съ v_1.

Абсолютная скорость точки m въ моментъ $t+dt$ будетъ:

$$= V_e^m + V_r^{a'} \qquad \overline{V'} = \overline{v'} + \overline{v_1'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a')$$

Взявъ геометрическія разности лѣвыхъ и правыхъ сторонъ геометрическихъ равенствъ (a) и (a'), получимъ:

$$\overline{dV} = \overline{dv} + \overline{dv_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Обозначивъ ускоренія абсолютнаго движенія черезъ Φ и составныхъ движеній черезъ φ и φ_1, получимъ по раздѣленіи обѣ-

X-79.

Величину и направленіе поворотнаго ускоренія мы будемъ обозначать знакомъ:

по имени Коріолиса $\dot{k}$.

Мы имѣемъ, слѣдовательно, такія выраженія для проэкцій поворотнаго ускоренія на оси X, $У$, Z:

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}\cos(\dot{k}X) &= -2(\xi'\lambda'_x+\eta'\mu'_x+\zeta'\nu'_x)\\ \dot{k}\cos(\dot{k}У) &= -2(\xi'\lambda'_y+\eta'\mu'_y+\zeta'\nu'_y)\\ \dot{k}\cos(\dot{k}Z) &= -2(\xi'\lambda'_z+\eta'\mu'_z+\zeta'\nu'_z)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (340)$$

Тѣ самыя преобразованія, помощію которыхъ мы изъ формулъ (93) получили формулы (96), дадутъ намъ возможность выразить тричлены, заключающіеся во вторыхъ частяхъ равенствъ (340), разностями, заключающими угловыя скорости P, Q, и R и проэкціи радіуса вектора $\overline{ЦЮ}$ на оси X, $У$, Z; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}\cos(\dot{k}X) &= -2(Qu\cos(uZ)-Ru\cos(uУ))\\ \dot{k}\cos(\dot{k}У) &= -2(Ru\cos(uX)-Pu\cos(uZ))\\ \dot{k}\cos(\dot{k}Z) &= -2(Pu\cos(uУ)-Qu\cos(uX))\end{aligned}\right\},\ .\ (341)$$

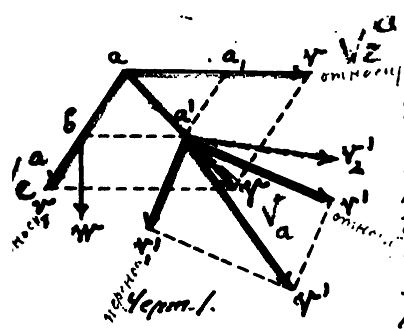
гдѣ проэкціи скорости (u) на оси X, $У$, Z выражаются формулами (196).

Величина поворотнаго ускоренія равняется произведенію:

$$2\Omega u\sin(u\Omega)=\dot{k};$$

направленіе же его перпендикулярно къ плоскости, параллельной угловой скорости неизмѣняемой среды и относительной скорости (u) движущейся точки M; сторона, въ которую направлено поворотное ускореніе, опредѣляется по слѣдующему правилу: наблюдателю, стоящему ногами въ точкѣ $Ю$, головою по направленію угловой скорости и смотрящему на точку Ц, длина, параллель-

Геометрическое доказательство теоремы Коріолиса.



Черт. 1.

Въ последнемъ изданіи „Traité de Mécanique Générale" извѣстнаго французскаго академика Резаля (томъ первый стр. 35, изданія 1895 года) помещено геометрическое поясненіе сложенія ускореній въ относительномъ движеніи, при чемъ допущена довольно существенная погрешность. Такъ какъ сочиненіе Резаля общеизвестно, то полагаю не безынтереснымъ обратить вниманіе на это поясненіе и указать, въ чемъ заключается его неточность, тѣмъ более, что приводимыя здесь соображенія могутъ служить довольно нагляднымъ, чисто геометрическимъ способомъ вывода известной теоремы Коріолиса объ ускореніи относительнаго движенія.

Вотъ переводъ поясненія Резаля:

„Сложеніе ускореній. Пусть будетъ для момента t (черт. 1)

V_r^m • v — относительная скорость точки m по отношенію къ неизменяемой системе (S);

V_e^m • v_1 — скорость точки a системы (S), съ которой совпадаетъ m въ моментъ t (скорость эта называется переносною);

V_a V — абсолютная скорость:

$$V_a = V_r + V_e \qquad \bar{V} = \bar{v} + \bar{v}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Въ промежутокъ времени dt точка m описала траекторію

$$\overline{aa'} = V.dt, \; = V_a dt$$

а точка a — траекторію

$$\overline{ab} = v_1.dt. = V_e a$$

Пусть будетъ:

V_r^m v' — относительная скорость точки m въ положеніи a',

$V_e^{a'}$ v_1' — переносная скорость точки a',

V_e^b w — скорость точки b тела (S); вообще говоря, не одинаковая съ v_1'

Абсолютная скорость точки m въ моментъ $t+dt$ будетъ:

$$= V_e^m + V_r^{a'} \qquad \bar{V}' = \bar{v}' + \bar{v}_1' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a')$$

Взявъ геометрическія разности левыхъ и правыхъ сторонъ геометрическихъ равенствъ (a) и (a'), получимъ:

$$d\bar{V} = \overline{dv} + \overline{dv_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Обозначивъ ускоренія абсолютнаго движенія черезъ Φ и составныхъ движеній черезъ φ и φ_1, получимъ по раздѣленіи обѣ

Величину и направленіе поворотнаго ускоренія мы будемъ обозначать знакомъ:

по имени Коріолиса $\dot{k}$.

Мы имѣемъ, слѣдовательно, такія выраженія для проэкцій поворотнаго ускоренія на оси X, $У$, Z:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}\cos(\dot{k}X) &= -2(\xi'\lambda'_x + \eta'\mu'_x + \zeta'\nu'_x) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}У) &= -2(\xi'\lambda'_y + \eta'\mu'_y + \zeta'\nu'_y) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}Z) &= -2(\xi'\lambda'_z + \eta'\mu'_z + \zeta'\nu'_z) \end{aligned}\right\} \quad . . . (340)$$

Тѣ самыя преобразованія, помощію которыхъ мы изъ формулъ (93) получили формулы (96), дадутъ намъ возможность выразить тричлены, заключающіеся во вторыхъ частяхъ равенствъ (340), разностями, заключающими угловыя скорости P, Q, и R и проэкціи радіуса вектора $\overline{ЦЮ}$ на оси X, $У$, Z; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}\cos(\dot{k}X) &= -2(Qu\cos(uZ) - Ru\cos(uУ)) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}У) &= -2(Ru\cos(uX) - Pu\cos(uZ)) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}Z) &= -2(Pu\cos(uУ) - Qu\cos(uX)) \end{aligned}\right\} , . (341)$$

гдѣ проэкціи скорости (u) на оси X, $У$, Z выражаются формулами (196).

Величина поворотнаго ускоренія равняется произведенію:

$$2\Omega u \sin(u\Omega) = \dot{k};$$

направленіе же его перпендикулярно къ плоскости, параллельной угловой скорости неизмѣняемой среды и относительной скорости (u) движущейся точки M; сторона, въ которую направлено поворотное ускореніе, опредѣляется по слѣдующему правилу: наблюдателю, стоящему ногами въ точкѣ $Ю$, головою по направленію угловой скорости и смотрящему на точку $Ц$, длина, параллель-

Геометрическое доказательство теоремы Коріолиса.

Черт. 1.

Въ последнемъ изданіи „Traité de Mécanique Générale" извѣстнаго французскаго академика Резаля (томъ первый стр. 35, изданія 1895 года) помѣщено геометрическое поясненіе сложенія ускореній въ относительномъ движеніи, при чемъ допущена довольно существенная погрѣшность. Такъ какъ сочиненіе Резаля общеизвѣстно, то полагаю не безынтереснымъ обратить вниманіе на это поясненіе и указать, въ чемъ заключается его неточность, тѣмъ болѣе, что приводимыя здѣсь соображенія могутъ служить довольно наглядным, чисто геометрическимъ способомъ вывода извѣстной теоремы Коріолиса объ ускореніи относительнаго движенія.

Вотъ переводъ поясненія Резаля:

„Сложеніе ускореній. Пусть будетъ для момента t (черт. 1)

V_r^m • v — относительная скорость точки m по отношенію къ неизмѣняемой системѣ (S);

V_e^m • v_1 — скорость точки a системы (S), съ которой совпадаетъ m въ моментъ t (скорость эта называется переносною);

V_a V — абсолютная скорость:

$$V_a = V_r + V_e \qquad \overline{V} = \overline{v} + \overline{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Въ промежутокъ времени dt точка m описала траекторію

$$\overline{aa'} = V.dt, \quad = V_a dt$$

а точка a — траекторію

$$\overline{ab} = v_1.dt. \quad = V_e dt$$

Пусть будетъ:

$V_r^{a'}$ v' — относительная скорость точки m въ положеніи a',

$V_e^{a'}$ v_1' — переносная скорость точки a',

V_e^{b} w — скорость точки b тѣла (S); вообще говоря, не одинаковая съ v_1,

Абсолютная скорость точки m въ моментъ $t+dt$ будетъ:

$$= V_e^{m'} + V_r^{a'} \qquad \overline{V'} = \overline{v'} + \overline{v_1'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a')$$

Взявъ геометрическія разности лѣвыхъ и правыхъ сторонъ геометрическихъ равенствъ (a) и (a'), получимъ:

$$\overline{dV} = \overline{dv} + \overline{dv_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Обозначивъ ускоренія абсолютнаго движенія черезъ Φ и составныхъ движеній черезъ φ и φ_1, получимъ по раздѣленіи обѣ

ихъ сторонъ (b) на dt

$$\overline{\Phi} = \overline{\varphi} + \overline{\varphi_1} \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Полагая $\overline{v_1'} = \overline{w} + \overline{\chi}$ . . . . (d)

получимъ

$$\overline{V'} - \overline{V} = \overline{v'} - \overline{v} + \overline{w} - \overline{v_1} + \overline{\chi} = \overline{v'} - \overline{v} + \overline{v_1'} - \overline{v_1} \quad \ldots \quad (e)$$

Но $\frac{\overline{w} - \overline{v_1}}{dt}$ есть такъ называемое переносное ускореніе φ_e точки a тѣла (S), слѣдовательно:

$$\overline{\Phi} = \overline{\varphi} + \overline{\varphi_e} + \frac{\chi}{dt}.$$

Это равенство выражаетъ, что $\overline{\Phi}$ состоитъ изъ относительнаго ускоренія $\overline{\varphi}$, переносного ускоренія $\overline{\varphi_e}$, и дополнительнаго ускоренія $\frac{\chi}{dt}$, которое будетъ опредѣлено на своемъ мѣстѣ.

Неточность заключается въ томъ, что Резаль принимаетъ геометрическую разность $\frac{\overline{v'} - \overline{v}}{dt} = \varphi$ за относительное ускореніе; это приводитъ къ неправильному заключенію, что дополнительное ускореніе есть $\frac{\chi}{dt} = \frac{\overline{v_1'} - \overline{w}}{dt}$. Между тѣмъ геометрическая разность $\frac{\overline{v'} - \overline{v}}{dt}$ не есть относительное ускореніе; она выражала бы относительное ускореніе въ томъ лишь случаѣ, если бы всѣ точки тѣла (S) двигались бы поступательно со скоростью точки (a); въ дѣйствительности же тѣло имѣетъ еще и вращательное движеніе съ угловой скоростью υ.

Обозначимъ пунктиромъ на чертежѣ Резаля векторъ v_2', выражающій положеніе, которое приметъ неизмѣнно связанный съ тѣломъ S векторъ v въ моментъ $t+dt$. Разность $\overline{v'} - \overline{v}$ можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ: $\overline{v'} - \overline{v} = \overline{v'} - \overline{v_2'} + \overline{v_2'} - \overline{v_1}$; $v_1' - v_1 = v_1' - w + w - v_1$.

Подставляя это значеніе въ уравненіе (e), замѣняя въ немъ χ его значеніемъ по (d) и раздѣляя на dt, получимъ

$$\frac{\overline{V'} - \overline{V}}{dt} = \frac{\overline{w} - \overline{v_1}}{dt} + \frac{\overline{v_1'} - \overline{w}}{dt} + \frac{\overline{v'} - \overline{v_2'}}{dt} + \frac{\overline{v_2'} - \overline{v}}{dt} \cdot = \frac{\overline{w} - \overline{v_1}}{dt} + \frac{\overline{\chi}}{dt} + \frac{\overline{v'} - \overline{v}}{dt}$$

Относительное ускореніе будетъ, очевидно

$$\varphi_r = \frac{\overline{v'} - \overline{v_2'}}{dt}, \quad \varphi_e = \frac{w - v_1}{dt} \text{ переносн.}$$

слѣдовательно

$$\overline{\Phi} = \overline{\varphi_e} + \overline{\varphi_r} + \frac{\overline{v_1'} - \overline{w}}{dt} + \frac{\overline{v_2'} - \overline{v}}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

Остается опредѣлить значенія дополнительныхъ членовъ

$$\frac{\overline{v_1'} - \overline{w}}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{v_2'} - \overline{v}}{dt}.$$

Первый изъ нихъ есть дѣленная на dt геометрическая

разность скоростей V_1' и W точекъ a' и b твердаго тѣла (S) или, что всеравно, точекъ a_1 и a. Но извѣстно, что скорость точки a_1 состоитъ изъ поступательной скорости одинаковой со скоростью точки a и изъ вращательной скорости вокругъ точки a. Слѣдовательно геометрическая разность между скоростями точекъ a_1 и a есть вращательная скорость точки a_1 относительно a. Обозначая угловую скорость твердаго тѣла (S) въ моментъ t черезъ v и принимая во вниманiе, что $aa_1 = V.dt$, найдемъ, что вращательная скорость точки a_1 вокругъ a есть

$$\overline{V_1'} - \overline{W} = \overline{v.V.dt.\sin(v,V)} \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

Далѣе, геометрическая разность $\overline{V_2'} - \overline{V}$, очевидно, равна пути пройденному ~~[illegible]~~ концомъ вектора $\overline{V}$ въ промежутокъ времени dt при вращенiи вокругъ a съ угловой скоростью v. Слѣдовательно

$$\overline{V_2'} - \overline{V} = \overline{V.v.dt.\sin(v,V)} \quad \ldots\ldots\ldots (k)$$

Подставляя (g) и (k) въ (f), получимъ геометрическое равенство

$$\overline{\Phi} = \overline{\varphi_r} + \overline{\varphi_e} + 2v.V\sin(v,V) \quad \ldots\ldots$$

выражающее извѣстную теорему Корiолиса.

Ф. С. Ясинскiй. Сочиненiя. Т. I. стр. 29.

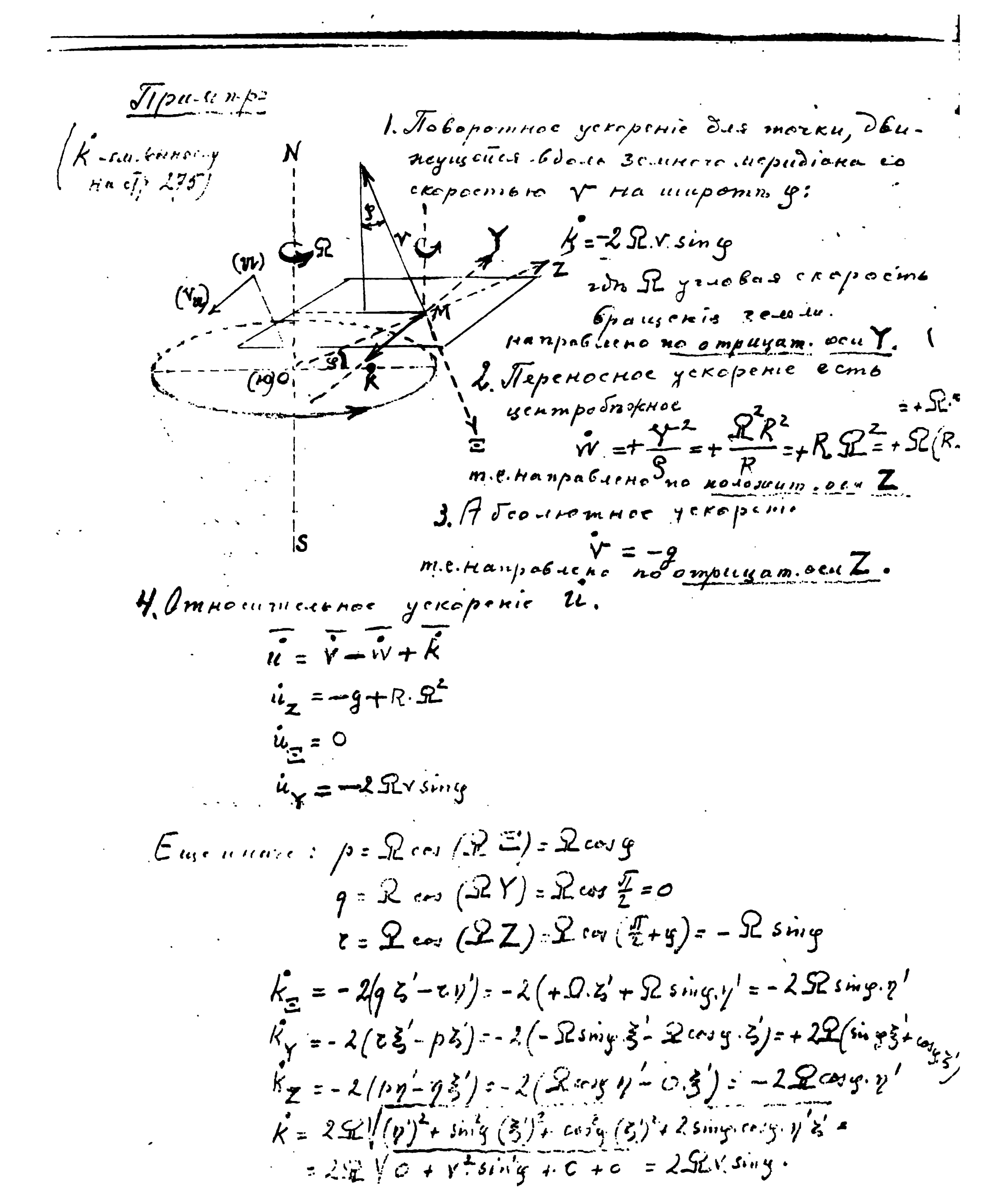
Резюме.

чертежъ Резаля

поворотъ

Правильный чертежъ

$\Phi = \varphi_e + \varphi_r + 2Vv\sin(Vv)$



Пример

(K̇ — см. выноску на стр. 275)

1. Поворотное ускорение для точки, движущейся вдоль земного меридиана со скоростью v на широте φ:

$$\dot k = -2\Omega v \sin\varphi$$

где Ω угловая скорость вращения земли.

направлено по отрицат. оси Y.

2. Переносное ускорение есть центробежное

$$\dot w = +\frac{v^2}{\rho} = +\frac{\Omega^2 R^2}{R} = +R\,\Omega^2 = +\Omega(R\cdot\Omega)$$

т.е. направлено по положит. оси Z

3. Абсолютное ускорение

$$\dot v = -g$$

т.е. направлено по отрицат. оси Z.

4. Относительное ускорение $\dot u$.

$$\bar{\dot u} = \bar{\dot v} - \bar{\dot w} + \bar{\dot k}$$

$$\dot u_Z = -g + R\cdot\Omega^2$$

$$\dot u_\Xi = 0$$

$$\dot u_Y = -2\Omega v \sin\varphi$$

Еще иначе: $p = \Omega\cos(\Omega\,\Xi) = \Omega\cos\varphi$

$q = \Omega\cos(\Omega Y) = \Omega\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$r = \Omega\cos(\Omega Z) = \Omega\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\Omega\sin\varphi$

$$\dot k_\Xi = -2(q\zeta' - r\eta') = -2(+0\cdot\zeta' + \Omega\sin\varphi\cdot\eta') = -2\Omega\sin\varphi\cdot\eta'$$

$$\dot k_Y = -2(r\xi' - p\zeta') = -2(-\Omega\sin\varphi\,\xi' - \Omega\cos\varphi\cdot\zeta') = +2\Omega(\sin\varphi\,\xi' + \cos\varphi\,\zeta')$$

$$\dot k_Z = -2(p\eta' - q\xi') = -2(\Omega\cos\varphi\,\eta' - 0\cdot\xi') = -2\Omega\cos\varphi\cdot\eta'$$

$$\dot k = 2\Omega\sqrt{(\eta')^2 + \sin^2\varphi\,(\xi')^2 + \cos^2\varphi\,(\zeta')^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\xi'\zeta'} =$$

$$= 2\Omega\sqrt{0 + v^2\sin^2\varphi + 0 + 0} = 2\Omega v\sin\varphi.$$

ная поворотному ускоренію и проведенная изъ точки $\mathfrak{U}$, представится направленною *справа на лѣво* (черт. 110).

Поворотное ускореніе обращается въ нуль:

a) когда скорость относительнаго движенія равна нулю,

b) когда угловая скорость равна нулю,

c) когда скорость относительнаго движенія параллельна мгновенной оси.

Затѣмъ остается разсмотрѣть значеніе послѣднихъ четырехъ членовъ во второй части каждаго изъ равенствъ (338).

Легко видѣть, что суммы этихъ четырехъ членовъ выражаютъ проэкціи на оси X, $У$, Z ускоренія той точки $\mathfrak{M}$ неизмѣняемой среды, съ которою въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ точка M; относительныя координаты точки $\mathfrak{M}$ постоянны, поэтому проэкціи ускоренія $(\dot{w})$ ея выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}\cos(\dot{w}X) &= x''_{ю} + \xi\lambda''_x + \eta\mu''_x + \zeta\nu''_x \\ \dot{w}\cos(\dot{w}У) &= y''_{ю} + \xi\lambda''_y + \eta\mu''_y + \zeta\nu''_y \\ \dot{w}\cos(\dot{w}Z) &= z''_{ю} + \xi\lambda''_z + \eta\mu''_z + \zeta\nu''_z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (342)$$

Изъ всего сказаннаго видно, что равенства (338) можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}X) &= \dot{u}\cos(\dot{u}X) + \dot{w}\cos(\dot{w}X) - \dot{k}\cos(\dot{k}X) \\ \dot{v}\cos(\dot{v}У) &= \dot{u}\cos(\dot{u}У) + \dot{w}\cos(\dot{w}У) - \dot{k}\cos(\dot{k}У) \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Z) &= \dot{u}\cos(\dot{u}Z) + \dot{w}\cos(\dot{w}Z) - \dot{k}\cos(\dot{k}Z) \end{aligned}\right\}; \; . \; (343)$$

а это означаетъ, что *ускореніе абсолютнаго движенія точки M можетъ быть разсматриваемо какъ геометрическая сумма трехъ ускореній: относительнаго ускоренія $(\dot{u})$ точки M въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ какой либо движущейся средѣ, ускоренія $(\dot{w})$ той точки среды*, съ которою въ

разсматриваемый моментъ совпадаетъ точка M, и ускоренія равнаго и прямопротивоположнаго поворотному ускоренію $(\dot{k})$.

Или:

$$\dot{u} = \dot{v} + \dot{k} - \dot{w} \ldots\ldots\ldots (344)$$

то есть *ускореніе относительнаго движенія есть геометрическая сумма ускореній абсолютнаго, поворотнаго, и ускоренія равнаго и прямопротивоположнаго ускоренію $(\dot{w})$.*

§ 80. Формулы, выражающія зависимость между проэкціями вышесказанныхъ четырехъ ускореній на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ движущеюся средою.

Такъ какъ ускоренія $\dot{v}$, $\dot{k}$, $(-\dot{w})$ и $(\dot{u})$ имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій равныхъ и параллельныхъ длинамъ, ихъ изображающимъ, можно построить замкнутый четыреугольникъ, то проэкція ускоренія $\dot{u}$ на всякое направленіе, подвижное или неподвижное, равняется суммѣ проэкцій на то же направленіе ускореній $\dot{v}$, $\dot{k}$ и взятаго въ противоположную сторону ускоренія $\dot{w}$.

Составимъ равенства, выражающія результаты проэктированія этого четыреугольника на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$.

Очевидно что проэкціи абсолютнаго ускоренія $\dot{v}$ на эти оси выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}\Xi) &= x''\lambda_x + y''\lambda_y + z''\lambda_z \\ \dot{v}\cos(\dot{v}\Upsilon) &= x''\mu_x + y''\mu_y + z''\mu_z \\ \dot{v}\cos(\dot{v}\mathbf{Z}) &= x''\nu_x + y''\nu_y + z''\nu_z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (345)$$

Такъ какъ относительныя координаты точки $\mathfrak{U}$ суть $\theta\xi'$, $\theta\eta'$, $\theta\zeta'$, то проэкціи поворотнаго ускоренія на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ на основаніи формулъ (114) стр. 103 выразятся такъ:

Движеніе параллельно плоскости. §79 б.'s

$x_m = x_{ю} + \xi_m \cos\vartheta - \eta_m \sin\vartheta;$ } § 19
$y_m = y_{ю} + \xi_m \sin\vartheta + \eta_m \cos\vartheta;$ } ф. 68.

$x' = x'_{ю} + \xi' \cos\vartheta - \eta' \sin\vartheta -$
$\quad - \xi \sin\vartheta . \vartheta' - \eta \cos\vartheta . \vartheta';$

$x'' = x''_{ю} + \xi'' \cos\vartheta - \eta'' \sin\vartheta -$
$\quad - \xi' \sin\vartheta . \vartheta' - \eta' \cos\vartheta . \vartheta' -$
$\quad - \xi' \sin\vartheta . \vartheta' - \eta' \cos\vartheta . \vartheta' -$
$\quad - \xi (\cos\vartheta . \vartheta'^2 + \sin\vartheta . \vartheta'') -$
$\quad - \eta (-\sin\vartheta . \vartheta'^2 + \cos\vartheta . \vartheta'');$

$x'' = x''_{ю} + (\xi'' \cos\vartheta - \eta'' \sin\vartheta) - 2(\xi' \sin\vartheta + \eta' \cos\vartheta) . \vartheta' -$
$\quad - (\xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta) . \vartheta'^2 - (\xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta) . \vartheta''$

$x - x_{ю} = \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta$
$y - y_{ю} = \xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta$

$x''_M = (\xi'' \cos\vartheta - \eta'' \sin\vartheta) - 2(\xi' \sin\vartheta + \eta' \cos\vartheta) . \vartheta' + (x''_{ю} - (x_M - x_{ю})\vartheta'^2 - (y_M - y_{ю})\vartheta'');$

и $y''_M = (\xi'' \sin\vartheta + \eta'' \cos\vartheta) + 2(\xi' \cos\vartheta - \eta' \sin\vartheta)\vartheta' + (y''_{ю} - (y_M - y_{ю})\vartheta'^2 + (x_M - x_{ю})\vartheta'').$

Здѣсь:

1. x''_m и y''_m проекціи на оси X и Y абсолютнаго ускоренія точки M.

2. $\xi'' \cos\vartheta - \eta'' \sin\vartheta$ } $\xi'' \sin\vartheta + \eta'' \cos\vartheta$ } проекціи на оси X и Y относительнаго ~~[illegible]~~ ускоренія $\dot{u} = +\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2}$ точки M (какъ на чертежѣ), т. е.

$\dot{u} . \cos(\dot{u}, X) = \xi'' \cos\vartheta - \eta'' \sin\vartheta$
$\dot{u} . \cos(\dot{u}, Y) = \xi'' \sin\vartheta + \eta'' \cos\vartheta.$

3. $\xi' \sin\vartheta + \eta' \cos\vartheta$ } $\xi' \cos\vartheta - \eta' \sin\vartheta$ } проекціи на оси Y и X относительной скорости $u = +\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ точки M (какъ на чертежѣ).

Поэтому

$-(\xi' \sin\vartheta + \eta' \cos\vartheta)$ } $+(\xi' \cos\vartheta - \eta' \sin\vartheta)$ } проекціи на оси X и Y той же относительной скорости $u = +\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ точки M, но отложенной отъ точки Ю въ направленіи W перпендикулярномъ къ дѣйствительному направленію u, какъ указано на чертежѣ.

Слѣдовательно

$-2(\xi' \sin\vartheta + \eta' \cos\vartheta)\vartheta'$ } $+2(\xi' \cos\vartheta - \eta' \sin\vartheta) . \vartheta'$ } проекціи на оси X и Y величины $2u\vartheta' = 2u\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$, отложенной на направленіи W, перпендикулярномъ къ дѣйствительному направленію скорости u точки M.

Обозначимъ

$$+2(\xi'\cdot\sin\vartheta + \eta'\cdot\cos\vartheta)\cdot\vartheta' = \overset{\bullet}{K}\cdot\cos(\overset{\bullet}{K}, X)$$

$$-2(\xi'\cdot\cos\vartheta - \eta'\cdot\sin\vartheta)\cdot\vartheta' = \overset{\bullet}{K}\cdot\cos(\overset{\bullet}{K}, Y)$$

причемъ величину и направленіе $\overset{\bullet}{K}$ назовемъ поворо-
нымъ ускореніемъ.

4. $x''_{ю} - (x_m - x_{ю})\cdot\vartheta'^2 - (y_m - y_{ю})\cdot\vartheta''$
$y''_{ю} - (y_m - y_{ю})\cdot\vartheta'^2 + (x_m - x_{ю})\cdot\vartheta''$ } суть проекціи на X и Y у-
ренія $\overset{\bullet}{W}$ той точки M сре-
съ которою совпадаетъ то-
т.е. переносного ускорені

$$\overset{\bullet}{W}\cdot\cos(\overset{\bullet}{W}, X) = x''_{ю} - (x_m - x_{ю})\cdot\vartheta'^2 - (y_m - y_{ю})\vartheta''$$

$$\overset{\bullet}{W}\cdot\cos(\overset{\bullet}{W}, Y) = y''_{ю} - (y_m - y_{ю})\cdot\vartheta'^2 + (x_m - x_{ю})\vartheta''.$$

II шагъ
$$\overline{\overset{\bullet}{V}} = \overline{\overset{\bullet}{u}} + \overline{\overset{\bullet}{W}} - \overline{\overset{\bullet}{K}}$$

или
$$\overline{\overset{\bullet}{u}} = \overline{\overset{\bullet}{V}} - \overline{\overset{\bullet}{W}} + \overline{\overset{\bullet}{K}}$$

Здесь

$$\overset{\bullet}{V}\cdot\cos(\overset{\bullet}{V}, X) = x''_m$$

$$\overset{\bullet}{V}\cdot\cos(\overset{\bullet}{V}, Y) = y''_m$$

$$\overset{\bullet}{u}\cdot\cos(\overset{\bullet}{u}, X) = \xi''\cdot\cos\vartheta - \eta''\cdot\sin\vartheta$$

$$\overset{\bullet}{u}\cdot\cos(\overset{\bullet}{u}, Y) = \xi''\cdot\sin\vartheta + \eta''\cdot\cos\vartheta$$

$$\overset{\bullet}{W}\cdot\cos(\overset{\bullet}{W}, X) = x''_{ю} - (x_m - x_{ю})\cdot\vartheta'^2 - (y_m - y_{ю})\cdot\vartheta''$$

$$\overset{\bullet}{W}\cdot\cos(\overset{\bullet}{W}, Y) = y''_{ю} - (y_m - y_{ю})\cdot\vartheta'^2 + (x_m - x_{ю})\cdot\vartheta''$$

$$\overset{\bullet}{K}\cdot\cos(\overset{\bullet}{K}, X) = +2(\xi'\cdot\sin\vartheta + \eta'\cdot\cos\vartheta)\cdot\vartheta'$$

$$\overset{\bullet}{K}\cdot\cos(\overset{\bullet}{K}, Y) = -2(\xi'\cdot\cos\vartheta - \eta'\cdot\sin\vartheta)\cdot\vartheta'$$

причемъ

$$x = x_{ю} + \xi\cos\vartheta - \eta\cdot\sin\vartheta$$

$$y = y_{ю} + \xi\sin\vartheta + \eta\cdot\cos\vartheta$$

а также

$$\xi = (x - x_{ю})\cdot\cos\vartheta + (y - y_{ю})\sin\vartheta$$

$$\eta = -(x - x_{ю})\cdot\sin\vartheta + (y - y_{ю})\cdot\cos\vartheta.$$

Пример 1.

$x = \alpha t$

$y = 0$

$z = 0$

$\vartheta = -\omega t$

$\varphi = 0$

$\psi = 0$

$x_{ro} = 0$

$y_{ro} = 0$

$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},X) =$

$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},Y) =$

$\dot{u}\cdot\cos(\dot{u},X) = -\alpha\omega^2 t$

$\dot{u}\cdot\cos(\dot{u},Y) = 2\alpha\omega$

$\dot{k}\cdot\cos(\dot{k},X) = -2\alpha\omega^2 t$

$\dot{k}\cdot\cos(\dot{k},Y) = 2\alpha\omega$

$\dot{w}\cdot\cos(\dot{w},X) =$

$\dot{w}\cdot\cos(\dot{w},Y) =$

$\xi = \alpha t\cdot\cos\omega t$

$\eta = \alpha t\cdot\sin\omega t$

$\xi' = \alpha\cos\omega t - \alpha\omega t\sin\omega t$

$\eta' = \alpha\sin\omega t + \alpha\omega t\cos\omega t$

$\xi'' = -2\alpha\omega\sin\omega t - \alpha\omega^2 t\cos\omega t$

$\eta'' = 2\alpha\omega\cos\omega t - \alpha\omega^2 t\sin\omega t$

Пример 2. см. стр 64 примеры

$x = 2R_1\sin\omega t$

$y = 0$

$\vartheta = -\omega t$

$x_{ro} = R\cos\omega t$

$y_{ro} = R\sin\omega t$

$\xi = R_1\sin 2\omega t - R\cos 2\omega t$

$\eta = 2R\sin^2\omega t - R\sin 2\omega t$

$\xi' = 2\omega(R_1\cos 2\omega t + R\sin 2\omega t)$

$y' = 2\omega(R_1\sin 2\omega t - R\cos 2\omega t)$

$\xi'' = -4\omega^2(R_1\sin 2\omega t - R\cos 2\omega t)$

$\eta'' = 4\omega^2(R_1\cos 2\omega t + R\sin 2\omega t)$

$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},X) = -2\omega^2 R_1\sin\omega t$

$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},Y) = 0$

$u\cdot\cos(u,X) =$

$u\cdot\cos(u,Y) =$

$\dot{w}\cdot\cos(\dot{w},X) = -2\omega^2 R_1\sin\omega t$

$\dot{w}\cdot\cos(\dot{w},Y) = 0$

$\dot{k}\cdot\cos(\dot{k},X) = -4\omega^2(R_1\sin\omega t - R\cos\omega t)$

$\dot{k}\cdot\cos(\dot{k},Y) = 4\omega^2(R_1\cos\omega t + R\sin\omega t)$

X-80; XI-81.

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}\cos(\dot{k}\Xi) &= -2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}\Upsilon) &= -2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ \dot{k}\cos(\dot{k}\mathbf{Z}) &= -2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (346)$$

Поэтому мы будемъ имѣть слѣдующія равенства, которыя намъ понадобятся въ механикѣ относительнаго движенія:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \dot{v}\cos(\dot{v}\Xi) - \dot{w}\cos(\dot{w}\Xi) - 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right) \ldots (347,\ \text{a})$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \dot{v}\cos(\dot{v}\Upsilon) - \dot{w}\cos(\dot{w}\Upsilon) - 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right) \ldots (347,\ \text{b})$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \dot{v}\cos(\dot{v}\mathbf{Z}) - \dot{w}\cos(\dot{w}\mathbf{Z}) - 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right) \ldots (347,\ \text{c})$$

Под[illegible], значенія $\dot{v}.\cos(\dot{v}\Xi)$ и $\dot{w}.\cos(\dot{w}\Xi)$ изъ ф. 345 и 331, получимъ

$\frac{d^2\xi}{dt^2} = [x''\lambda_x + y''\lambda_y + z''\lambda_z] - [(x''_{w}\lambda_x + y''\lambda_y + z''\lambda_z) + (\zeta q' - \eta r') + p(p\xi + q\eta + r\zeta) - \xi\Omega^2] - 2[q\zeta' - r\eta']$; т. е. $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \dot{v}.\cos(\dot{v}\Xi) - \dot{w}_{w}\cos(\dot{w}_{w}\Xi) - \zeta q' + \eta r' - p(p\xi + q\eta + r\zeta) + \xi\Omega^2 - 2(q\zeta' - r\eta')$; и т. д. [illegible]

ГЛАВА XI.

Объ ускореніяхъ въ составныхъ движеніяхъ.

§ 81. Положимъ, что какое либо движеніе точки M есть составное изъ двухъ составляющихъ движеній: изъ относительнаго движенія точки M по отношенію къ нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ № I и изъ переноснаго движенія точки M вмѣстѣ съ этою средою.

Ускореніемъ точки M въ какой либо моментъ t въ каждомъ изъ этихъ составляющихъ движеній мы называемъ то ускореніе, которое имѣла бы въ этотъ моментъ точка M тогда, когда было бы уничтожено другое составляющее движеніе, а точка M въ оставшемся движеніи проходила бы въ моментъ t черезъ положеніе, занимаемое ею въ этотъ моментъ въ составномъ движеніи.

По этому опредѣленію ускоренія составляющихъ движеній суть: $\dot{u}$ — ускореніе относительнаго движенія точки M по отношенію

къ средѣ № I и $\dot{w}$ — *ускоренiе переноснаго движенiя*, равное ускоренiю той точки среды № I, съ которою въ моментъ t совпадаетъ точка M.

Изъ сказаннаго въ послѣднихъ двухъ параграфахъ предыдущей главы видно, что, *вообще говоря*, *ускоренiе составнаго движенiя не равняется геометрической суммѣ ускоренiй составляющихъ движенiй.*

Такъ что, если мы построимъ на ускоренiяхъ $\dot{u}$ и $\dot{w}$ составляющихъ движенiй параллелограммъ, то дiагональ его не будетъ представлять величину и направленiе ускоренiя составнаго движенiя; чтобы получить послѣднее, придется на полученной дiагонали и на ускоренiи, равномъ и противоположномъ поворотному, построить новый параллелограмъ, дiагональ котораго уже будетъ изображать ускоренiе составнаго движенiя.

Но, если среда № I *движется поступательно, то тогда ускоренiе составнаго движенiя есть геометрическая сумма ускоренiй составляющихъ движенiй.*

При составномъ движенiи точки M, образующемся изъ соединенiя нѣсколькихъ составляющихъ движенiй, какъ указано въ § 60, мы дадимъ слѣдующее опредѣленiе ускоренiямъ точки въ составлюящихъ движенiяхъ.

Ускоренiе точки M въ моментъ t въ которомъ либо изъ составляющихъ движенiй есть то ускоренiе, которое имѣла бы въ этотъ моментъ точка M тогда, когда были бы уничтожены всѣ составляющiя движенiя, исключая разсматриваемаго, и притомъ уничтоженiе тѣхъ составляющихъ движенiй было сдѣлано такъ, чтобы въ оставшемся движенiи, какъ точка M, такъ и вспомогательныя среды приходили бы въ моментъ t въ тѣ положенiя, которыя они занимаютъ въ этотъ моментъ въ составномъ движенiи.

Возьмемъ напримѣръ составное движенiе, разсмотрѣнное на страницахъ 216 и 217, и, согласно съ даннымъ опредѣленiемъ, перечислимъ ускоренiя въ его составляющихъ движенiяхъ.

Представимъ себѣ, что всѣ среды находятся неподвижно въ тѣхъ

XI-81.

самыхъ положеніяхъ, которыя онѣ занимаютъ при полномъ движеніи въ моментъ t; относительное же движеніе точки M по отношенію къ средѣ № (K—I) мы предположимъ неизмѣнившимся; то ускореніе, которое при этихъ предположеніяхъ будетъ имѣть точка M въ моментъ t, есть ускореніе точки M въ моментъ t въ составляющемъ движеніи № 1-й.

Представимъ себѣ, что среды №№: I, II, ... (K—II) находятся неподвижно въ тѣхъ самыхъ положеніяхъ, которыя онѣ занимаютъ въ моментъ t; предположимъ, что точка M совпадаетъ съ тою точкою $\mathfrak{M}$I среды № (K—I), съ которою она совпадаетъ въ моментъ t, но что относительное движеніе среды № (K—I) по отношенію къ средѣ № (K—II) совершается такимъ же образомъ, какъ и при составномъ движеніи; ускореніе, которое при этихъ предположеніяхъ будетъ имѣть точка M въ моментъ t, есть ускореніе точки M въ моментъ t въ составляющемъ движеніи № 2. Очевидно, что это ускореніе тождественно съ ускореніемъ точки $\mathfrak{M}$I въ моментъ t въ относительномъ движеніи ея по отношенію къ средѣ № (K—II).

Нетрудно видѣть, какъ продолжать эти разсужденія далѣе.

Весьма важно обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство:

Ускореніе составнаго движенія точки есть геометрическая сумма ускореній ея въ составляющихъ движеніяхъ, но только при томъ условіи, чтобы неизмѣняемыя среды, при помощи которыхъ совершается составленіе движенія, всѣ двигались бы поступательно . . . . (348)

Если это условіе соблюдено, то проэкція на какое бы то ни было направленіе L, подвижное или неподвижное, ускоренія $\dot{v}$ точки M въ составномъ движеніи равняется суммѣ проэкцій ускореній ея $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$, ... въ составляющихъ движеніяхъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}L) = \dot{v}_1\cos(\dot{v}_1L) + \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2L) + \dot{v}_3\cos(\dot{v}_3L) + \ldots \quad (349)$$

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОШИБКИ.

стр.	*строка*	*напечатано*	*должно быть*
19	19 св.	$s_{t1+\vartheta} - s_{t1}$	$s_{t_1+\vartheta} - s_{t_1}$
26	9 „	$x_1 = \frac{\alpha\beta}{g} y_1 =$	$x_1 = \frac{\alpha\beta}{g};\ y_1 =$
27	2 сн.	. . . . . . (18)	. . . . . . (8)
28	14 св.	формулъ (9)	формулъ (8)
41	1 сн.	(1 — tg)	$1 - \mathrm{tg}^2 \frac{f}{2}$
42	16 „	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}$	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$
53	13 „	S	S_0
58	17 „	иъ	въ
59	6 „	$-2CbAa$	$-2CcAa$
68	3 св.	$\eta \cos\vartheta + \xi$	$\eta \cos\vartheta + \xi \sin\vartheta$
69	25 „	μ_m	η_m
74	5 „	$y = \omega_1 t$	$\vartheta = \omega_1 t$
75	17 „	Точка же $\mathfrak{M}_1$, отстоящая отъ $\mathfrak{M}_2$	Точка же $\mathfrak{M}_2$, отстоящая отъ $\mathfrak{M}_1$
118	22 „	*ж* = *a*	*ж* = 0
120	9 „	какъ, бы то ни было	какъ бы то ни было
122	19 „	неимѣющую	имѣющую
126	9 „	скорости, которыхъ	скорости которыхъ
157	10 „	$d\eta$	$d\eta_c$
165	4 „	п	по
167	1 сн.	b^2	$b\omega^2$
173	1 св.	$\frac{d(\rho\cos(\rho\Omega))}{dt}$	$\frac{d(\rho\cos(\rho\Xi))}{dt}$
174	16 „	двнженіе	движеніе
185	20 „	Oa и OA	Oa и aA
213	7 „	среды, № III	среды № III,
215	25 „	ZZ'	$\mathbf{ZZ}'$
—	27 „	OZ	$O\mathbf{Z}$
216	13 „	OZ	$O\mathbf{Z}$
—	17 „	OZ	$O\mathbf{Z}$
243	30 „	другое; MN	другое: MN
266	16 „	(231)	(321)
268	17 „	ускороній	ускореній

Черт. 17.

Черт. 18.

Черт. 19.

Черт. 20.

Черт. 21.

Черт. 22.

Черт. 23.

Черт. 24.

Черт. 26.

Черт. 11.

Черт. 25.

Черт. 28.

Черт. 11 bis.

Черт. 27.

Черт. 30.

Черт. 29.

Черт. 31.

СПБ. Лит. Ф. Кремеръ Звѣринская ул. № 44

Указатель именъ

Указатель именъ

Примеры	на страницахъ.
1	6-25-39-
2	7-25-39-240-
3	7-13-25-40-240-
4	11-37-252-
5	11-37-40-252-
6	12-37-221-256-
7	12-38-40-
8	14-22-
9	14-
10	41-169-253-
11	64-65-155-
12	64-66-155-158-
13	67-80-158-
14	70-
15	74-95-106-1[illegible]8-186-
16	75-98-118-
17	138-148-
18	152-
19	163-
20	164-
21	164-
22	165-
23	165-
24	166-
25	168-
26	175-
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	1[illegible]-
30	19[illegible]-
31	194-
[illegible]	195-
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]-203-203-204-228
[illegible]	[illegible]

Примеры	на страницахъ.
I	219-
II	219-
36	220-
37	222-226-
38	225-
39	225-
40	226-
41	228-
III	238-
IV	263-

Задачи:
[illegible] 3.4.5.6.7, 49–54; 240-241; 253-254;
8.9.10.11

Fro…
Joseph …
Vancouver, … C.,

относительное движение
стр. 56 фр. 46.
стр. 178 фр. 199
стр. 274 фр. 338
II томъ § 30.

ACP3582

QA 805 .B65 1885 C.1
Kurs analiticheskoi mekhaniki.
Stanford University Libraries
3 6105 030 068 584

QA805
B65
1885
Vol. 1

DATE DUE

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

